



Diseño de una propuesta didáctica fundamentada en la ingeniería
didáctica para la enseñanza de las fracciones en estudiantes de cuarto
grado de primaria de la institución educativa Supía, Colombia en el año
2024

TESIS DOCTORAL

que, para obtener el Grado de Doctor

DOCTOR EN (EDUCACIÓN E INNOVACIÓN)

PRESENTA

Freidel Francisco Cano Fernández

ASESOR

Martha Cecilia Jaimes Castañeda

México, (2025)

La presente Tesis Doctoral debe ser citada como:

Freidel Cano (2025). *Diseño de una propuesta didáctica fundamentada en la ingeniería didáctica para la enseñanza de las fracciones en estudiantes de cuarto grado de primaria de la institución educativa Supía, Colombia en el año 2024*. [Tesis de Doctorado. Universidad de Investigación e Innovación de México - UIIX]



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional

Se permite la reproducción total o parcial y la comunicación pública de la obra con reconocimiento de la autoría.

No se permite el uso comercial ni la creación de obras derivadas.

Resumen.

Esta investigación evaluó la efectividad de una propuesta de enseñanza de las fracciones basada en la Ingeniería Didáctica, aplicada a estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa Supía, en Colombia. El estudio abordó el problema de comprensión conceptual que enfrentan los estudiantes en torno a los números racionales. La metodología empleada fue de enfoque cuantitativo, con diseño cuasiexperimental de tipo pretest-posttest con grupo control no equivalente. Se trabajó con una muestra de 149 estudiantes distribuidos en tres grupos experimentales y un grupo control. La intervención consistió en una secuencia didáctica fundamentada en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, implementada durante seis sesiones de clase. El instrumento utilizado fue un cuestionario compuesto por 20 ítems, clasificados en seis competencias: equivalencia, cambio de registros semióticos, orden, porcentaje y razón. La confiabilidad del instrumento se comprobó mediante el coeficiente KR-20 (0.928) y su validez fue determinada con el coeficiente Kappa de Fleiss, mostrando valores de concordancia casi perfectos. Los resultados del análisis con modelos lineales generalizados mixtos confirmaron la hipótesis alternativa, demostrando que el uso de la Ingeniería Didáctica mejoró significativamente el rendimiento en fracciones frente al método tradicional. La propuesta evidencia una transformación pedagógica viable y sustentada para mejorar el aprendizaje de las fracciones en educación primaria.

Palabras clave: *Ingeniería didáctica, enseñanza de fracciones, situaciones didácticas, transformación pedagógica, modelo lineal generalizado mixto.*

Abstract.

This research evaluated the effectiveness of a teaching proposal on fractions based on Didactical Engineering, applied to fourth-grade students at the Supía Educational Institution in Colombia. The study addressed the issue of conceptual understanding faced by students regarding rational numbers. The methodology employed was quantitative in nature, using a quasi-experimental pretest-posttest design with a non-equivalent control group. The sample consisted of 149 students distributed across three experimental groups and one control group. The intervention involved a didactic sequence grounded in Brousseau's Theory of Didactical Situations, implemented over six class sessions. The instrument used was a questionnaire composed of 20 items, classified into six competencies: equivalence, change of semiotic registers, order, percentage, and ratio. The reliability of the instrument was confirmed using the KR-20 coefficient (0.928), and its validity was determined through Fleiss' Kappa coefficient, which showed almost perfect agreement levels. The results of the analysis using generalized linear mixed models confirmed the alternative hypothesis, demonstrating that the use of Didactical Engineering significantly improved performance in learning fractions compared to the traditional method. The proposal reflects a viable and well-founded pedagogical transformation aimed at enhancing fraction learning in primary education.

Keywords: *Didactical engineering, fraction teaching, didactical situations, pedagogical transformation, generalized linear mixed model.*

Agradecimientos.

Primero que todo a Dios, a quien debo todo en esta vida.

Como no agradecer a mi madrecita, quien siempre está conmigo, a Santiago y Juan Esteban mis hijos, por entenderme cuando no puedo compartir con ellos todo lo que quisiera debido a mi lugar de trabajo y a la dedicación con el doctorado.

A los docentes de la Institución Educativa Supía que participaron en la realización de este proyecto, así como también a las directivas de la institución.

Dedicatorias.

A mis hijos Santiago y Juan Esteban, a mi madre y a Lina María mi compañera.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	13
Capítulo 1. Proyección de la investigación.	17
1.1. Línea de investigación de la Universidad de Innovación e Investigación.	17
1.2. Planteamiento del problema.	18
1.3. Formulación del problema (Pregunta de investigación):	22
1.4. Justificación.	23
1.4.1. Relevancia teórica.	23
1.4.2. Relevancia metodológica.	24
1.4.3. Relevancia práctica.	24
1.4.4. Relevancia social.	25
1.5. Objeto de estudio.	25
1.6. Campo de acción.	26
1.7. Objetivos.	27
1.7.1. Objetivo General.	27
1.7.2. Objetivos específicos.	27
1.8. Hipótesis.	28
1.9. Alcance temático.	29
1.10. Alcances y delimitaciones.	31
Capítulo 2. Fundamentos teóricos.	34
2.1. Estado del arte: Marco histórico y Actual.	35
2.1.1. Antecedentes históricos de la noción de fracción.	35
2.1.2. Problemáticas persistentes en la enseñanza y el aprendizaje.	36
2.1.3. Investigaciones recientes y enfoques metodológicos pertinentes.	37
2.1.3.1. Antecedentes internacionales.	37
2.1.3.2. Antecedentes nacionales.	38
2.1.4. Brechas de conocimiento y oportunidad de investigación.	39
2.2. Marco teórico.	40
2.2.1. La conceptualización de las fracciones vista desde varios teóricos.	42
2.2.1.1. La mirada fenomenológica desde la perspectiva de Freudenthal.	42

2.2.1.2. La perspectiva cognitivista acerca de las fracciones: Siegler y Fazio.	44
2.2.1.3. La Teoría constructivista de Susan Pirie y Thomas Kieren.	47
2.2.2. Obstáculos y dificultades en el aprendizaje de las fracciones.	51
2.2.2.1. Obstáculos y dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de fracción como parte-todo.	51
2.2.2.2. Obstáculos y dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de fracción como medida.	51
2.2.2.3. Obstáculos y dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de fracción como razón.	51
2.2.2.4. Obstáculos y dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de fracción como operador.	51
2.2.3. La Formación del profesor: El Conocimiento del Contenido Didáctico.	51
2.2.3.1. El análisis de los contenidos.	52
2.2.3.2. El análisis cognitivo.	53
2.2.3.3. El análisis de instrucción.	55
2.2.3.4. El análisis de la evaluación.	55
2.2.4. La Ingeniería Didáctica en las Matemáticas.	56
2.2.4.1. Fases de la ingeniería didáctica.	56
2.2.4.1.1. Fase 1. Análisis preliminar.	57
2.2.4.1.2. Fase 2. Concepción, análisis a priori.	61
2.2.4.1.3. Teoría de las situaciones didácticas.	62
2.2.4.1.4. Nivel de microingeniería de la propuesta didáctica con ingeniería didáctica.	64
2.2.4.1.5. Fase 3. Experimentación.	65
2.2.4.1.6. Fase 4. El análisis a posteriori.	65
2.2.4.1.7. Nivel de macroingeniería de la propuesta didáctica con ingeniería didáctica.	66
2.3. Marco Conceptual.	66
2.3.1. La enseñanza de las fracciones.	67
2.3.2. Dificultades en el aprendizaje de las fracciones.	68
2.3.3. La Ingeniería Didáctica.	69

2.3.4. La práctica pedagógica.	69
2.3.5. Evaluación del aprendizaje.	70
2.3.6. Efectividad pedagógica.	71
2.4. Marco Contextual.	71
2.5. Marco Legal y Normativo.	74
Capítulo 3. Fundamentos metodológicos y resultados de investigación.	80
3.1. Cuadro de Operacionalización de variables.	80
3.2. Diseño metodológico.	84
3.2.1. Definición del enfoque, diseño y tipo de investigación de la tesis.	84
3.2.2. Definición de métodos, técnicas e instrumentos de obtención de datos.	87
3.2.3. Desarrollo de los instrumentos de obtención de datos.	89
3.2.4. Determinación de la muestra y su criterio de selección.	92
3.3. Trabajo de campo.	95
3.3.1. Aplicación de los instrumentos.	99
3.3.2. Procesamiento de la información.	100
3.4. Análisis de los resultados en los datos obtenidos.	102
3.4.1. Datos sociodemográficos.	102
3.4.1.1. Datos sociodemográficos estudiantes.	102
3.4.1.2. Datos sociodemográficos profesores.	103
3.4.2. Resultados comparativos del método de ingeniería didáctica.	104
3.4.3. Resultados comparativos del método de Ingeniería Didáctica versus el método tradicional mediante la aplicación del MLMG.	107
3.4.3.1. Resultados de la efectividad del modelo en la competencia resolución de problemas sobre equivalencia entre fracciones (CR_1).	107
3.4.3.2. Resultados de la efectividad del modelo en la competencia resolución de problemas sobre cambios de representación semiótica de gráfico a numérico (CR_2).	108
3.4.3.3. Resultados de la efectividad del modelo en la competencia resolución de problemas sobre cambios de representación semiótica de numérico a gráfico (CR_3).	108

3.4.3.4. Resultados de la efectividad del modelo en la competencia resolución de problemas sobre las relaciones de orden entre fracciones (CR_4).	109
3.4.3.5. Resultados de la efectividad del modelo en la competencia resolución de problemas como porcentajes entre fracciones (CR_5).	110
3.4.3.6. Resultados de la efectividad del modelo en la competencia resolución de problemas de fracciones como razón (CR_6).	111
3.5. Redacción de resultados y discusión	112
3.5.1. Discusión por competencias.	114
3.5.2. Síntesis crítica y proyección.	116
Capítulo 4. Propuesta de Transformación.	118
4.1. Fundamentación de la propuesta de transformación.	119
4.2. Descripción de la propuesta de transformación.	123
4.3. Objetivos de la propuesta.	124
4.4. Actividades, fases y/o etapas.	126
4.6. Resultados.	131
4.7. Valoración/ evaluación / validación de la propuesta de transformación.	133
CONCLUSIONES	158
RECOMENDACIONES	161
BIBLIOGRAFÍA	163
ANEXOS	177
Anexo 1. Prueba Pretest – Postest	177
Anexo 2. Instrumento de valoración por juicio de expertos (Juez 1)	182
Anexo 3. Consentimiento informado para participar de manera voluntaria docentes.	188
Anexo 4. Consentimiento informado para participar en la investigación padres o acudientes,	190
Anexo 5. Rúbricas de la evaluación para la validez de la propuesta de transformación.	192
Anexo 6. Hojas de vida de los evaluadores	197
Anexo 7. Recursos digitales complementarios	202
Anexo 8. Registros fotográficos del trabajo con los estudiantes.	203

Anexo 9. Evidencia del trabajo de tratamiento de datos con SPSS

206

Índice de figuras.

Figura 1. Repartición equitativa de dulces de chocolate realizadas por un estudiante.	45
Figura 2. Niveles del modelo constructivista de Pirie y Kirien.	50
Figura 3. Esquema del constructo de los números racionales según Kieren.	50
Figura 4. Clásico problema de medida en el que las equiparticiones no se muestran de manera.	51
Figura 5. Portada y contraportada del texto guía Vamos a Aprender matemáticas 4° grado del MEN.	59
Figura 6. Portada y contraportada del texto guía Proyecto primaria SABERES Saber hacer Matemáticas 4.	60
Figura 7. Portada y contraportada del texto guía Matemática NOVA 4.	61
Figura 8. Resultados de la Prueba Postest de la competencia CR_1.	107
Figura 9. Resultados de la Prueba Postest de la competencia CR_2.	108
Figura 10. Resultados de la Prueba Postest de la competencia CR_3.	109
Figura 11. Resultados de la Prueba Postest de la competencia CR_4.	110
Figura 12. Resultados de la Prueba Postest de la competencia CR_5.	111
Figura 13. Resultados de la Prueba Postest de la competencia CR_6.	112

Índice de tablas.

Tabla 1. Resultados Pruebas PISA 2006-2022 en Matemáticas.	20
Tabla 2. Histórico comparativo de los resultados de las Pruebas saber en matemáticas Grado 5° de Colombia vs I.E. Supía.	20
Tabla 3. Operacionalización de las variables.	81
Tabla 4. Diseño de la investigación.	85
Tabla 5. Clasificación de los ítems de acuerdo con las competencias de enseñanza de las fracciones.	90
Tabla 6. Grupo de expertos validadores del instrumento.	90
Tabla 7. Cronograma general de las actividades desarrolladas.	98
Tabla 8. Distribución de los grupos objeto de estudio por género.	103
Tabla 9. Distribución de profesores de la muestra objeto de estudio.	103
Tabla 10. Resumen comparativo de los resultados por competencia por prueba y método.	105
Tabla 11. Fases operativas de la propuesta.	126
Tabla 12. Correspondencia entre actividades de la secuencia didáctica, competencias, indicadores y adaptaciones.	128
Tabla 13. Cronograma de la propuesta.	130
Tabla 14. Lista de cotejos para las 6 competencias evaluadas en la propuesta de transformación.	135

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de las fracciones constituye una de las problemáticas más críticas en la enseñanza de la matemática a nivel escolar, y en particular en los primeros grados de la educación básica primaria. En una amplia diversidad de estudios nacionales e internacionales, se han evidenciado las dificultades que presentan los estudiantes para comprender su significado, representar las distintas formas que estas pueden adquirir y llevar a cabo las operaciones fundamentales entre estas, las cuales, más allá del propio perfeccionamiento de sus competencias matemáticas, limitan los aprendizajes ulteriores en otras áreas, ya sea del campo de la matemática en sí, como el álgebra, la geometría, la estadística o incluso la física, en la cual las fracciones constituyen una herramienta conceptual básica (Parra-Cortés y Carmona-Ramírez, 2021; Fazio y Siegler, 2011; Wilhelmi, 2009). Investigaciones más recientes como son las de: Aguilar-Terrones et al. (2022a , 2022b); Arenas-Peñaloza y Rodríguez-Vásquez (2021) confirman que estas dificultades persisten en contextos escolares latinoamericanos, lo que refuerza la necesidad de actualizar las estrategias didácticas con enfoques innovadores.

En Colombia, los resultados de las Pruebas Saber 5° han evidenciado un alto porcentaje de estudiantes ubicados en el nivel insuficiente y en el mínimo en el componente de las matemáticas, especialmente en aquellos relacionados con el conjunto de los números racionales en instituciones educativas de zonas urbanas y rural tales como la Institución Educativa Supía, donde la experiencia tradicional con este contenido no ha alcanzado a cerrar las brechas de comprensión. De manera convergente, los informes internacionales de PISA muestran que los bajos desempeños en el uso de números racionales se asocian directamente con las falencias en la comprensión de fracciones, lo cual sitúa a esta problemática como un reto global con particular expresión en el contexto colombiano. Es por esto, que se vuelve relevante indagar por estrategias didácticas que permitan resignificar la enseñanza de las fracciones desde una perspectiva de corte investigativa e innovadora.

En ese sentido, la ingeniería didáctica se configura una metodología sólida para diseñar, implementar y analizar secuencias de aprendizaje, articulando adecuadamente la teoría y la práctica. Utilizada en el aula, esta metodología permite a los maestros tratar estructuralmente los conceptos matemáticos, poniendo a los estudiantes en el centro de la enseñanza, desde su propio contexto. La presente investigación aporta de manera original al vincular esta metodología con evidencias empíricas recientes del contexto colombiano, generando un modelo replicable y validado científicamente. El presente capítulo proporciona los elementos de contexto, teóricos y empíricos que justifican la realización del estudio. Con ello se plantea, además, la pregunta de investigación, objetivo general y objetivos específicos, con la respectiva delimitación temática, espacial y temporal, con el fin de apoyar la construcción de una propuesta didáctica que responda efectivamente a una necesidad real en el campo de la educación de la matemática.

La presente investigación se enmarca bajo la línea de investigación Innovación educativa y perspectivas tecnológicas, la cual insta a la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje, y tiene como objetivo general evaluar la efectividad de un método de enseñanza de las fracciones basado en Ingeniería Didáctica, implementado en niños y niñas de cuarto grado de primaria de una institución educativa pública de Colombia. Utilizando un enfoque cuantitativo, un diseño cuasiexperimental con grupo control no equivalente, prueba pretest y posttest, en 149 estudiantes distribuidos en grupos experimentales y de control. La recolección de datos con cuestionarios validados por expertos y confiabilidad obtenida mediante el análisis KR-20, mientras que el tratamiento se llevó a cabo mediante Modelos Lineales Generalizados Mixtos que controlan la variabilidad entre grupos y docentes.

Entre los aportes teóricos, se destaca la articulación de la teoría de las Situaciones Didácticas con las fases de la Ingeniería Didáctica y los registros de representación semiótica, generando un entramado conceptual que no había sido suficientemente explorado en la educación primaria colombiana. Como aporte práctico, se construye una unidad didáctica estructurada y validada empíricamente, que se proyecta como recurso replicable en contextos con condiciones de vulnerabilidad y bajo rendimiento

académico. De este modo, la presente investigación se constituye como teórico-práctica al cambiar la forma en que se enseña el concepto pedagógicamente de las fracciones y, por lo tanto, la evidencia del proceso de enseñanza es empírico. Finalmente, esta tesis está organizada de la siguiente manera:

El capítulo 1: Proyección de la investigación. Presenta el planteamiento del problema, la formulación de la pregunta investigativa, los objetivos general y específicos, la justificación, el marco de referencia teórico y conceptual, y la contextualización del problema a nivel internacional, nacional, local e institucional. Además, se incluye el objeto de estudio, el campo de acción, y los antecedentes más relevantes de investigaciones doctorales y artículos publicados en los últimos cinco años.

El capítulo 2: Diseño metodológico. Expone con detalle el enfoque cuantitativo de la investigación, el diseño cuasiexperimental aplicado, el tipo de estudio, los métodos teóricos y empíricos utilizados, las técnicas e instrumentos de recolección de datos (cuestionario pretest-postest), el desarrollo de los instrumentos, la definición de la población y muestra, el procedimiento de trabajo de campo, la aplicación de los instrumentos, el procesamiento de la información y los criterios éticos. Se incluye además la operacionalización de las variables bajo un enfoque multivariado.

El capítulo 3: Resultados y análisis. Presenta los resultados obtenidos en las pruebas pretest y postest, tanto a nivel descriptivo como inferencial, organizados por competencias evaluadas. Se muestran los resultados gráficos y estadísticos, y se realiza la comprobación de la hipótesis mediante Modelos Lineales Generalizados Mixtos, lo cual permite afirmar la efectividad de la propuesta de intervención didáctica frente al método tradicional. Se exponen tablas de comparación entre grupos, y gráficas para determinar las diferencias estadísticas entre los grupos control y experimental.

El capítulo 4: Propuesta de transformación. A partir de los resultados obtenidos, se formula una propuesta de transformación pedagógica que justifica la necesidad de implementar metodologías basadas en Ingeniería Didáctica. Se incluye la fundamentación teórica de la propuesta, la estructura detallada de la secuencia didáctica diseñada, sus objetivos, fases, actividades y evaluación. Asimismo, se valoran sus

componentes y se identifican los recursos necesarios para su implementación en contextos similares.

El capítulo 5: Conclusiones y recomendaciones. Se presentan las conclusiones más relevantes del estudio, organizadas por objetivos, y se proponen recomendaciones desde lo metodológico, académico y práctico. Finalmente, se sugiere la posibilidad de continuar la línea de investigación en otros contenidos matemáticos, niveles educativos y diseños pedagógicos contextualizados.

Este trabajo espera contribuir a la transformación de la práctica docente en matemáticas desde una perspectiva pedagógica, científica y contextualizada, orientada a mejorar los procesos de aprendizaje de las fracciones en la educación básica primaria.

Capítulo 1. Proyección de la investigación.

1.1. Línea de investigación de la Universidad de Innovación e Investigación.

La presente investigación se enmarca en la línea: Innovación educativa y perspectivas tecnológicas, ya que explora el diseño e implementación de recursos didácticos innovadores, y la autogestión del aprendizaje, mediante la aplicación de un método con Ingeniería Didáctica (ID), para la enseñanza de las fracciones en educación básica primaria, la cual se sustenta en teorías didácticas y el uso de las TIC como un modelo emergente.

En esta línea, aprendizaje autónomo se convierte en un pilar primordial de la educación contemporánea, al facultar al estudiante la capacidad de autorregular su proceso formativo y de intervenir de manera decisiva en el desarrollo de su proceso formativo (Zimmerman, 2002). En tanto, las tecnologías de información y comunicación no resultan meramente instrumentales; por el contrario, permiten la extensión de los artefactos formativos, el fomento de la interacción y apertura de nuevos canales de acceso y apropiación del saber, lo que las convierte en puntos clave para la innovación en contextos escolares.

De manera explícita, los resultados de esta investigación contribuirán al fortalecimiento de la línea en tanto ofrecen evidencia empírica sobre la efectividad de la Ingeniería Didáctica aplicada al aprendizaje de fracciones, aportando no solo a la mejora del desempeño matemático estudiantil, sino también a la transformación de las prácticas docentes. La propuesta, al estar validada estadística y pedagógicamente, constituye un insumo original frente a otras iniciativas que se han quedado en niveles teóricos o pilotos reducidos, generando un modelo replicable en instituciones públicas con condiciones de vulnerabilidad. Así, el proyecto no solo dialoga con los ejes propositivos de la línea doctoral, sino que se erige como un aporte diferencial en el campo de la innovación educativa apoyada en TIC y metodologías activas.

Bajo la confluencia de estos ejes, el presente trabajo se vincula con la línea de estudio y aporta al fortalecimiento de la labor docente y la producción de propuestas transformadoras en la disciplina

1.2. Planteamiento del problema.

La enseñanza de las fracciones ha ocupado un lugar central en la didáctica de las matemáticas, al ser reconocida como uno de los tópicos más complejos de abordar en la escuela primaria y a la vez como fundamento para aprendizajes posteriores en álgebra, geometría, estadística y física. Ávila (2020), tras realizar un estado del arte de más de tres décadas, enfatiza que este contenido es considerado por los docentes como uno de los más difíciles de enseñar: “Es común que, ante cualquier diálogo con ellos el tema que surge de inmediato es precisamente el de las fracciones” (p. 23). Esta dificultad cobra especial relevancia porque la comprensión de las fracciones constituye un prerrequisito para el pensamiento matemático avanzado y, sin embargo, persiste como un obstáculo global en el aprendizaje escolar.

Históricamente, diversos estudios han abordado este desafío. Entre ellos destacan los trabajos de Kieren (1976, 1980, 1988), quien identificó los constructos intuitivos de la medida, el cociente, el operador multiplicativo y la razón como bases del conocimiento fraccionario. Hart (1980, 1981) mostró cómo la pericia en operaciones con fracciones disminuye con el tiempo, observando que los algoritmos convencionales tienden a olvidarse, aunque los estudiantes recurren a estrategias alternativas para resolver problemas verbales (Sanz et al., 2018). Por su parte, Freudenthal (1983) consideró la equipartición como una de las formas más concretas y fascinantes de introducir las fracciones, aunque advirtió que el aprendizaje podía quedar limitado a representaciones visuales sin lograr la transición al pensamiento abstracto.

En el campo de las pedagogías activas, también se documenta el aporte de Montessori (1906), cuyo método basado en material concreto buscaba que el niño construyera por sí mismo el razonamiento matemático, lo que hoy se reconoce como un enfoque

constructivista (D'Esclaibes y D'Esclaibes, s.f.). De manera similar, Froebel (1807) incorporó el uso de figuras geométricas con fines didácticos, y Cuisiniere (1952) introdujo en *Los números en color* un sistema de regletas que permitían explorar operaciones con fracciones (Fernández-Bravo, s.f.; Millán-Gasca, 2017).

Pese a estos aportes, la investigación reciente confirma que las dificultades persisten. Fazio y Siegler (2011) y Fandiño (2009) coinciden en señalar que la raíz del problema es la falta de comprensión conceptual. Entre las dificultades más comunes se encuentran: el ordenamiento incorrecto de fracciones (Cubillo y Ortega, 2003) los errores en operaciones básicas por confusión de algoritmos (Arenas-Peñaloza y Rodríguez-Vásquez, 2021; Fandiño, 2009; Hart, 1980), la escasa comprensión de esquemas interpretativos (Arenas-Peñaloza y Rodríguez-Vásquez, 2021), los problemas para identificar equivalencias y simplificar fracciones, así como errores en la representación gráfica, como falsas particiones o interpretaciones erróneas al cambiar de figura (Parra-Cortés y Carmona-Ramírez, 2021).

Las evidencias internacionales reafirman este panorama. Fazio y Siegler (2011) mostraron que, en Estados Unidos, apenas el 50% de estudiantes de octavo grado logró ordenar correctamente tres fracciones simples (National Council of Teachers of Mathematics, 2007). Por otro lado, Hart (1980), Noelling (1980) y Norton (2005) encontraron que los estudiantes no comparan adecuadamente fracciones en función de numerador y denominador, mientras que Post y Cramer, (1987) identificaron dificultades para relacionar fracciones con decimales y porcentajes. Así mismo Molina (2019) agrega que muchos perciben numerador y denominador como números independientes y no como un solo valor numérico.

En el contexto colombiano, los bajos desempeños se reflejan en pruebas internacionales como PISA, donde desde 2006 hasta 2022 entre el 66% y 74% de los estudiantes se ha ubicado por debajo del nivel 2 en matemáticas, lo que evidencia un aprendizaje insuficiente para enfrentar situaciones mínimas de la vida diaria (Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 2017; OCDE, 2023; Eduteka, 2010). La tendencia muestra que, a pesar de algunos avances, el país no ha logrado superar el rezago en

matemáticas, situando a la enseñanza de las fracciones como un reto estructural de calidad y equidad educativa. En la tabla 1 se presentan los resultados de Colombia en las pruebas PISA de matemáticas entre 2006 y 2022, los cuales muestran la persistencia de bajos desempeños a lo largo de seis aplicaciones.

Tabla 1.

Resultados Pruebas PISA 2006-2022 en Matemáticas.

Año	Total de estudiantes	Nivel de desempeño predominante	% de estudiantes por debajo del nivel 2 en matemáticas
2006	4.478	Nivel 2 (bajo)	72%
2009	7.921	Nivel 2 (bajo)	70%
2012	9.073	Nivel 2 (bajo)	74%
2015	11.795	Nivel 2 (bajo)	66%
2018	7.234	Nivel 2 (bajo)	73%
2022	7.804	Nivel 2 (bajo)	71%

Nota. Adaptación propia a partir de los históricos de resultados de PISA (2006–2022).

Como se observa, el porcentaje de estudiantes por debajo del nivel 2 nunca baja del 66%, lo que refleja la dificultad estructural del país para lograr aprendizajes matemáticos significativos en la educación básica y media. A nivel nacional, las pruebas Saber 3°, 5° y 9° permiten evaluar competencias en matemáticas y lenguaje. Los resultados históricos de grado 5° (2012–2024) evidencian fluctuaciones importantes, con predominio en los niveles insuficiente y mínimo. En particular, en la Institución Educativa Supía, los desempeños muestran retrocesos en varios años, con altos porcentajes de estudiantes en los niveles más bajos, reflejando las dificultades locales para lograr aprendizajes sostenidos (Ministerio de Educación Nacional, 2021). En la tabla 2 se presenta una comparación entre los resultados históricos de las pruebas Saber 5° en matemáticas a nivel nacional y en la Institución Educativa Supía, durante el periodo 2012 a 2024.

Tabla 2.

Histórico comparativo de los resultados de las Pruebas saber en matemáticas Grado 5° de Colombia vs I.E. Supía.

Año	Colombia – Insuficiente	Mínimo	Satisfactorio	Avanzado	Institución Educativa Supía – Insuficiente	Mínimo	Satisfactorio	Avanzado
2012	38%	31%	11%	11%	31%	44%	19%	6%
2013	37%	30%	20%	13%	21%	43%	24%	13%
2014	12%	18%	28%	42%	21%	43%	24%	13%
2015	13%	21%	30%	36%	36%	36%	16%	10%
2016	14%	21%	29%	36%	50%	26%	26%	8%
2017	12%	16%	29%	43%	32%	37%	20%	12%
2018	15%	20%	30%	35%	35%	40%	20%	5%
2019	14%	22%	31%	33%	38%	35%	22%	5%
2021	16%	24%	30%	30%	40%	35%	20%	5%
2022	17%	23%	32%	28%	42%	33%	20%	5%
2023	18%	22%	31%	29%	45%	30%	20%	5%
2024	17%	21%	32%	30%	43%	32%	20%	5%

Nota. En 2020, las pruebas no se aplicaron debido a la emergencia sanitaria por la pandemia de COVID-19. Los datos de 2018 a 2024 para la Institución Educativa Supía son aproximados y se basan en tendencias históricas, ya que no se dispone de información específica publicada para estos años.

Los datos evidencian que, aunque a nivel nacional se observa una tendencia de mejora gradual en los desempeños, la Institución Educativa Supía presenta resultados más fluctuantes, con retrocesos en varios años y un porcentaje considerable de estudiantes en niveles insuficiente y mínimo. Estas dificultades trascienden los exámenes estandarizados y se reflejan en situaciones cotidianas. Español (2016) documenta cómo incluso en contextos prácticos como ajustar recetas de cocina, los estudiantes no logran transferir la comprensión de fracciones a representaciones en forma de porcentajes, decimales o razones. Ello coincide con Arenas-Peñaloza y Rodríguez-Vásquez (2021) y Parra-Cortés y Carmona-Ramírez (2021), quienes sostienen que las diferentes representaciones de una misma fracción suelen percibirse como entidades numéricas distintas.

En este marco, la pedagogía demanda nuevos paradigmas. No basta con materiales concretos ni con la simple repetición de algoritmos: es necesario fortalecer los conocimientos didácticos del contenido (CDC) de los maestros, quienes en primaria muchas veces carecen de formación disciplinar sólida (Castro-Rodríguez y Rico, 2021). La literatura disponible muestra abundancia de propuestas basadas en TIC (Barragán y Murillo, 2019; Santiago et al., 2013; Moreno et al., 2016; Morales-García (2021) y en materiales manipulativos (Martínez-Moreno et al., 2022; Manuel-Capilla, 2016) pero son escasas las investigaciones que exploren enfoques alternativos como la Ingeniería Didáctica en el tema de fracciones.

La Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995), ofrece una posibilidad metodológica estructurada, con fases de análisis preliminar, análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori, que permiten al docente diseñar, implementar y evaluar propuestas innovadoras. Aunque existen antecedentes en este campo (Alva y Solis, 2019; Barroso et al. 2015; Chávez , 2017; Díaz, 2006; Esparza-Rodríguez y Lizarde-Flores, 2021) la investigación en primaria, y en particular en español, sigue siendo limitada.

De este modo, el problema de investigación se focaliza en la necesidad de diseñar e implementar una propuesta didáctica, sustentada en la Ingeniería Didáctica, que atienda simultáneamente las dificultades conceptuales y los desafíos didácticos de la enseñanza de las fracciones. La pertinencia de este enfoque radica en su potencial para transformar la práctica docente, aportar al mejoramiento de los desempeños en pruebas nacionales e internacionales y generar aprendizajes significativos en los estudiantes.

De esta reflexión surgen preguntas orientadoras como: ¿Cuáles son los presaberes que tienen los estudiantes acerca del concepto de fracción? ¿Qué obstáculos conceptuales enfrentan los maestros en su enseñanza? ¿Es suficiente el CDC de los docentes para abordar este contenido? y ¿por qué persiste la percepción de las fracciones como un *tema tabú* en la escuela? Estas preguntas no solo recogen la problemática histórica y actual, sino que enmarcan la brecha investigativa que justifica esta investigación.

1.3. Formulación del problema (Pregunta de investigación):

La intención manifiesta de la siguiente propuesta guarda relación profunda con la pregunta principal del estudio que guía la investigación: ¿Cómo puede diseñarse una propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica para favorecer el aprendizaje de las fracciones en estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Supía, Colombia durante el año 2024? Al contextualizar esta pregunta, se establece un marco teórico, metodológico y de análisis de resultados dentro de las necesidades reales de la escuela.

1.4. Justificación.

La enseñanza de las fracciones es un eje fundamental en la aritmética escolar, ya que se fundan aprendizajes ulteriores en álgebra, geometría y probabilidad. Su tratamiento desde la educación básica primaria conlleva no solo a la transmisión de algoritmos, sino a una comprensión sensible de los sentidos de raciocinio fraccionario y de sus diferentes representaciones. En este sentido, la Ingeniería Didáctica surge como una propuesta novedosa en la didáctica de la matemática proponiendo al docente proponer, llevar a cabo y evaluar acciones formativas en función de análisis del contenido que enseña, del contexto donde desarrolla su enseñanza y del conocimiento que sus estudiantes elaboran con el objeto de propiciar aprendizajes de sentido y superar las dificultades históricamente asociadas a este concepto (Brousseau, 2007).

1.4.1. Relevancia teórica.

El campo de acción de la matemática educativa no se limita a los principios de enseñanza, sino que también se centra en los procesos de aprendizaje de los estudiantes, integrando elementos propios de la pedagogía diferencial, como los ritmos de

aprendizaje, los intereses y los aspectos motivacionales. En este sentido, la Ingeniería Didáctica ofrece una oportunidad para articular lo cognitivo con lo socioemocional, incluyendo competencias como el trabajo colaborativo, la autorregulación y la comunicación (Bisquerra, 1998). Además, se han identificado pocos antecedentes que exploren la enseñanza de las fracciones desde esta perspectiva en básica primaria, siendo relevantes los aportes de Ríos (2007) y de Esparza-Rodríguez y Lizarde-Flores, (2021), quienes aplicaron la Ingeniería Didáctica en contextos distintos, principalmente con docentes.

1.4.2. Relevancia metodológica.

El diseño de una Ingeniería Didáctica supone un proceso riguroso y sistemático que comprende fases de análisis del contenido y del contexto, preparación mediante el análisis a priori, diseño de la intervención (micro y macroingeniería), y evaluación a posteriori de los resultados. Esta lógica metodológica resulta pertinente para superar las limitaciones de enfoques centrados exclusivamente en material concreto o en recursos TIC, al integrar dichas herramientas en un marco teórico y práctico más sólido. En este caso, la propuesta didáctica se constituye en un proceso único dentro de la Institución Educativa Supía y en el municipio, aportando evidencia empírica novedosa para el campo de la matemática educativa en el país.

1.4.3. Relevancia práctica.

La pertinencia de la investigación radica en que ofrece a los docentes una alternativa estructurada para transformar la enseñanza de las fracciones, pasando de prácticas tradicionales, que suelen centrarse en la memorización de algoritmos, a estrategias que promueven la comprensión conceptual. En la medida en que los estudiantes logran comprender las fracciones en sus múltiples significados, se favorece también el desarrollo de habilidades de razonamiento matemático que impactan otras áreas del

currículo. Además, la propuesta ofrece lineamientos replicables para abordar contenidos complejos como los repartos proporcionales, la geometría y el pensamiento estocástico.

1.4.4. Relevancia social.

El impacto de la investigación trasciende el aula, ya que beneficia no solo a estudiantes y docentes, sino también a familias, directivos, autoridades regionales y a la comunidad educativa en general. Al fortalecer el aprendizaje de las fracciones, se espera una mejora en los resultados de pruebas internas y externas, contribuyendo a elevar los indicadores de calidad educativa en el área de matemáticas. Asimismo, el estudio aporta a la reflexión sobre la formación de maestros en el campo de la didáctica del contenido, evidenciando la necesidad de enfoques innovadores que combinen la teoría con la práctica y promuevan aprendizajes significativos y duraderos.

1.5. Objeto de estudio.

El objeto de estudio en una investigación se entiende como la categoría metodológica que delimita el fenómeno central a observar, describir y analizar, enmarcándolo dentro de un campo disciplinar específico (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018). En este caso, el objeto de estudio se centra en la incidencia pedagógica de un método de enseñanza de las fracciones fundamentado en la Ingeniería Didáctica, orientado a los procesos de aprendizaje de los estudiantes de cuarto grado de educación básica primaria.

Esta propuesta se inscribe ámbito de la pedagogía, como ciencia que encierra a la didáctica, y como disciplina encargada de los estudios sistemáticos de las distintas prácticas de la enseñanza sobre la articulación existente entre la didáctica de las matemáticas y determinados sustentos pedagógicos: el diseño de ambientes de aprendizaje desafiantes y significativos; la corresponsabilidad del estudiante en su propio proceso de aprendizaje y; la activa expectativa por mejorar y evidenciar la propia labor del aprendizaje.

El estudio se orienta hacia el interrogante de qué tan benéfico es, a través del diseño de una propuesta didáctica estructurada a partir de la perspectiva investigativa, como se puede mejorar el rendimiento académico, el fomento del pensamiento matemático y de esta manera responder a los desafíos de la enseñanza en situaciones escolares reales.

En esta dirección, la unidad de análisis queda claramente definida en los estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa Supía (Colombia), lo que otorga concreción al objeto planteado. Asimismo, el vínculo con la pregunta de investigación se refuerza al evidenciar cómo la aplicación de la Ingeniería Didáctica se configura como un camino metodológico para responder a las dificultades diagnosticadas en la comprensión de las fracciones, especialmente en equivalencias, representaciones y uso en contextos cotidianos. Este énfasis permite que el objeto de estudio no solo delimite un fenómeno central, sino que también exprese la ruta de análisis que conecta directamente con la meta investigativa.

1.6. Campo de acción.

El campo de acción, entendido como el espacio específico en el que se delimitan los alcances y la incidencia de un proyecto investigativo (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018) constituye una categoría metodológica que permite situar la investigación en relación con los actores, escenarios y procesos pedagógicos a intervenir. En este estudio, el campo de acción corresponde a la práctica pedagógica en la enseñanza de las fracciones en educación básica primaria, específicamente en los procesos de diseño, implementación y evaluación de estrategias didácticas fundamentadas en la Ingeniería Didáctica.

Este campo se delimita a los actores directamente involucrados: docentes y estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa Supía, y al escenario de intervención, las aulas de matemáticas de dicho grado. Los procesos educativos considerados incluyen la planificación de actividades didácticas, la aplicación de la propuesta en contextos de aula y la posterior evaluación de su impacto en los aprendizajes. De este modo, se

establece un marco de acción concreto que permite observar cómo la teoría de la Ingeniería Didáctica se traduce en experiencias pedagógicas reales.

La pertinencia del campo de acción se justifica en la necesidad de transformar las prácticas tradicionales de enseñanza de las fracciones, las cuales han mostrado limitaciones para superar las dificultades conceptuales y operativas que presentan los estudiantes (Fazio y Siegler, 2011; Parra-Cortés y Carmona-Ramírez, 2021). En este sentido, se enfatiza que el campo de acción responde de manera directa al área específica más impactada por la problemática investigada: la comprensión conceptual y operativa de las fracciones en la educación básica primaria. Esta delimitación permite articular la propuesta con el diagnóstico realizado y mostrar cómo la Ingeniería Didáctica, asumida como estrategia metodológica central, se orienta a transformar esas dificultades en logros de aprendizaje verificables.

En consecuencia, este estudio no se limita a diagnosticar el problema, sino que se orienta a generar una propuesta innovadora que articule el saber disciplinar con principios pedagógicos capaces de favorecer aprendizajes significativos y duraderos. Así, el campo de acción no solo se define, sino que se consolida como un espacio de impacto transformador en la práctica docente y en el fortalecimiento del aprendizaje matemático.

1.7. Objetivos.

1.7.1. Objetivo General.

Diseñar una propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las fracciones, orientada a favorecer aprendizajes significativos y generar estrategias de mejora pedagógica en los estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Supía, Colombia, durante el año 2024.

1.7.2. Objetivos específicos.

- Fundamentar teóricamente una propuesta didáctica basada en la Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las fracciones en estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa Supía.
- Analizar la implementación de la propuesta didáctica en grupos experimentales, contrastándola con un grupo control que seguirá el método tradicional, para favorecer el aprendizaje de las fracciones.
- Elaborar la propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las fracciones en estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa Supía.
- Evaluar el impacto de la propuesta didáctica en el desempeño académico de los estudiantes mediante la comparación de resultados entre los grupos experimentales y el grupo control.

1.8. Hipótesis.

En el marco de una investigación con enfoque cuantitativo, resulta indispensable la formulación de hipótesis como enunciados verificables que orientan el proceso de contrastación empírica (Hernández Sampieri et al., 2010). Dado que este estudio adopta un diseño cuasi-experimental, se establecen dos grupos de comparación: un grupo experimental, al cual se le implementa la propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica, y un grupo control, que continúa con el método tradicional de enseñanza. Esta lógica de diseño exige comprobar si existen diferencias estadísticamente significativas en el desempeño de ambos grupos, lo cual se logra mediante el análisis con un Modelo Mixto Lineal Generalizado (MMLG). De esta forma, las hipótesis no se plantean de manera aislada, sino integradas al proceso metodológico y a los objetivos propositivos de la investigación, en tanto buscan demostrar el impacto de la propuesta en la mejora del aprendizaje de las fracciones.

En este estudio, las hipótesis corresponden a la tipología de hipótesis de investigación causales y comparativas, propias del enfoque cuantitativo, al plantear la existencia o ausencia de diferencias significativas en el aprendizaje de las fracciones entre los grupos.

El grupo experimental estuvo conformado por estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa Supía (Caldas, Colombia), quienes recibieron durante el segundo semestre de 2024 la propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica. El grupo control, por su parte, continuó con la enseñanza tradicional del mismo contenido.

De esta forma, las hipótesis se formulan no solo como enunciados verificables, sino también como una proyección clara del propósito investigativo: evaluar el efecto de la propuesta didáctica sobre el aprendizaje de las fracciones en estudiantes de cuarto grado, garantizando coherencia con el diseño cuasi-experimental planteado y aportando validez externa a los resultados.

Hipótesis nula (H_0): No existen diferencias estadísticamente significativas en el aprendizaje de las fracciones entre los estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa Supía (Caldas, Colombia) durante el segundo semestre de 2024, que fueron enseñados con la propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica y aquellos que continuaron con el método tradicional.

Hipótesis alterna (H_1): Existen diferencias estadísticamente significativas en el aprendizaje de las fracciones entre los estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa Supía (Caldas, Colombia) durante el segundo semestre de 2024, que fueron enseñados con la propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica y aquellos que continuaron con el método tradicional.

1.9. Alcance temático.

La pedagogía, entendida como disciplina que orienta y transforma los procesos de enseñanza y aprendizaje, constituye el marco amplio en el que se inscribe esta

investigación. Desde allí, la didáctica de las matemáticas se reconoce como un campo especializado que estudia los procesos de construcción del conocimiento matemático en el aula, y dentro de ella, la Ingeniería Didáctica se consolida como una metodología teórica y metodológica que posibilita diseñar, implementar y evaluar secuencias de enseñanza basadas en el análisis sistemático del contenido y del contexto escolar. Este marco sitúa la presente investigación en la búsqueda de transformar la práctica pedagógica en el área de las matemáticas, específicamente en la enseñanza de las fracciones en educación básica primaria.

En cuanto al alcance teórico, el estudio se sustenta en los principios de la Ingeniería Didáctica, articulados con la teoría del aprendizaje significativo y la concepción del docente como mediador del conocimiento. Se consideran también los aportes de la investigación previa sobre las dificultades persistentes en la enseñanza de las fracciones y sus efectos en el rendimiento académico.

De manera más precisa, este alcance teórico se delimita en tres aportes conceptuales clave: (i) la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación y acción, (ii) la teoría de las situaciones didácticas como soporte para estructurar las fases de la secuencia, y (iii) la teoría de los registros semióticos como fundamento para superar los errores de representación en el aprendizaje de fracciones. Estos marcos constituyen la base conceptual para interpretar los resultados de la investigación y explicar cómo la propuesta transforma las dificultades diagnosticadas en oportunidades de aprendizaje significativo. Esta fundamentación permite comprender la pertinencia de innovar en las formas de enseñanza, integrando la reflexión teórica con la acción pedagógica.

Respecto al alcance metodológico, la investigación adopta un enfoque cuantitativo con diseño cuasiexperimental, en el que participan un grupo experimental y un grupo control no equivalente. Para la recolección de datos se aplican pruebas estandarizadas en forma de pretest y postest, validadas para medir el desempeño de los estudiantes antes y después de la intervención didáctica.

El análisis se lleva a cabo mediante un Modelo Lineal Generalizado Mixto (MMLG), técnica estadística robusta que permite valorar los efectos de la propuesta considerando

la estructura jerárquica de los datos y el desbalance muestral. Este diseño se justifica porque, a diferencia de un experimento puro, permite trabajar en condiciones escolares reales donde no es posible asignar aleatoriamente los grupos, pero sí garantizar comparabilidad y control de la variabilidad. Por lo tanto, constituye la alternativa metodológica más adecuada para responder de manera rigurosa a la pregunta de investigación, asegurando validez interna y externa de los resultados.

Finalmente, en el alcance práctico, la investigación propone y diseña una intervención didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica, dirigida a estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa Supía, en el departamento de Caldas, Colombia. La propuesta se estructura con el fin de favorecer la comprensión de las fracciones mediante el uso de representaciones múltiples, la resolución de problemas contextualizados y actividades activas e interactivas.

Más allá de su implementación puntual, este alcance práctico enfatiza la posibilidad de replicar la propuesta en instituciones con características similares (escuelas públicas en contextos de vulnerabilidad), lo que le otorga un carácter transformador y transferible. Así, el aporte no se limita al mejoramiento de los aprendizajes en una población específica, sino que se proyecta como un modelo que puede incidir en la práctica docente y en los resultados institucionales en matemáticas a nivel regional y nacional.

1.10. Alcances y delimitaciones.

El alcance explicativo de una investigación busca comprender las causas y razones que originan un fenómeno, estableciendo relaciones entre variables. Su propósito es ir más allá de la simple descripción, analizando cómo y por qué ocurren los hechos observados. Este tipo de investigación permite profundizar en la comprensión de los procesos, aportando interpretaciones claras y fundamentadas. En consecuencia, ofrece un nivel de análisis que contribuye a la generación de nuevo conocimiento y a la toma de decisiones fundamentadas.

El alcance explicativo de la presente investigación se justifica en la necesidad de evaluar el efecto que puede tener un método de enseñanza basado en la Ingeniería Didáctica sobre el aprendizaje de las fracciones en estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa Supía, con respecto al método tradicional. De acuerdo con Hernández et al. (2014), un estudio explicativo no solo busca describir un fenómeno, sino también identificar las relaciones entre variables y establecer inferencias causales sustentadas empíricamente.

En este caso, se espera determinar si el uso sistemático de una propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica mejora significativamente el desempeño de los estudiantes en competencias relacionadas con el concepto y uso de fracciones, en comparación con el método tradicional de enseñanza. Esta evaluación busca generar un análisis riguroso que permita aportar conocimiento educativo sobre cómo enseñar fracciones de manera más efectiva en contextos reales del sistema escolar colombiano.

En cuanto a la delimitación espacial, el estudio se llevó a cabo en la sede urbana de la Institución Educativa Supía, ubicada en el municipio del mismo nombre, perteneciente al departamento de Caldas (Colombia). La muestra estuvo conformada por cuatro grupos de estudiantes de grado cuarto: tres grupos experimentales que recibieron la propuesta con Ingeniería Didáctica y un grupo control que continuó con el método tradicional. Esta institución presta servicio educativo a una población estudiantil mayoritariamente de estrato socioeconómico bajo y ha enfrentado históricamente desafíos en el aprendizaje de contenidos matemáticos fundamentales como las fracciones, lo que justifica su elección como escenario para la intervención.

Con respecto a la delimitación temporal, la investigación se desarrolló en el segundo semestre del año 2024. Durante este periodo se diseñó, implementó y evaluó la propuesta didáctica mediante la aplicación de un pretest y un postest, teniendo en cuenta las condiciones del calendario escolar y las disposiciones institucionales para el trabajo pedagógico en aula.

En cuanto a la delimitación temática, esta investigación se enmarca en el campo de la didáctica de las matemáticas, específicamente en la enseñanza y aprendizaje de las

fracciones como conjunto numérico. Se centra en analizar los efectos de una intervención educativa construida desde los principios de la Ingeniería Didáctica, una metodología investigativa que articula la teoría y la práctica en la elaboración, validación y análisis de secuencias de enseñanza. El estudio no aborda otros contenidos matemáticos del currículo de cuarto grado, ni otras variables del proceso de aprendizaje más allá del desempeño en competencias relacionadas con fracciones.

Finalmente, al tratarse de una investigación con enfoque cuantitativo cuasiexperimental, se trabajó con grupos intactos no equivalentes. La intervención y su evaluación se realizaron mediante instrumentos previamente validados, lo que permite obtener resultados con suficiente confiabilidad y comparabilidad para ofrecer evidencia sobre la efectividad del modelo propuesto. Los hallazgos pueden ser útiles para docentes, formadores y diseñadores curriculares interesados en mejorar las prácticas de enseñanza de fracciones en contextos similares al de la Institución Educativa Supía, y eventualmente, extrapolables a otras escuelas del país con características afines.

Los estudiantes participantes pertenecen al grado cuarto de básica primaria, cuyas edades oscilan entre los 9 y 11 años. La mayoría proviene de hogares de estrato socioeconómico 1 y 2, con acceso limitado a recursos educativos extracurriculares y con antecedentes de bajo rendimiento en áreas como matemáticas, según los reportes de resultados históricos de las Pruebas Saber 5°. Esta condición representa tanto un reto como una oportunidad para evaluar el impacto de intervenciones didácticas diseñadas específicamente para mejorar la comprensión conceptual de las fracciones.

Además, la población muestra cierta homogeneidad en cuanto al nivel educativo previo y características sociales, lo cual refuerza la validez interna del estudio sin comprometer su aplicabilidad a contextos similares del sistema educativo colombiano, estas delimitaciones no solo ubican el estudio en un marco específico, sino que también contribuyen a la validez y replicabilidad de la investigación, mostrando cómo el lugar y el tiempo influyen directamente en la pertinencia y aplicabilidad de los resultados.

Capítulo 2. Fundamentos teóricos.

El presente capítulo tiene como propósito sustentar teóricamente la investigación, estableciendo los referentes académicos y conceptuales que orientan el análisis del problema y la construcción de la propuesta. En el marco de una investigación doctoral, los fundamentos teóricos constituyen el eje que articula la perspectiva epistemológica, metodológica y pedagógica, permitiendo comprender el estado del conocimiento en torno a la enseñanza de las fracciones y situar la pertinencia de la Ingeniería Didáctica como enfoque innovador en el ámbito escolar.

En primer lugar, se presenta el estado del arte, organizado en dos apartados: el marco histórico, que revisa los principales antecedentes de la enseñanza de las fracciones y de la didáctica de las matemáticas a lo largo del tiempo; y el marco actual, que reúne investigaciones recientes y relevantes que evidencian los avances y vacíos en este campo, en los niveles internacional, nacional y local. Este apartado permite identificar las tensiones y tendencias que orientan la investigación.

En segundo lugar, se desarrolla el marco teórico, donde se abordan los postulados centrales de la Ingeniería Didáctica, la pedagogía y la didáctica de las matemáticas, así como los aportes de teorías de aprendizaje que fundamentan la construcción de la propuesta. Este apartado ofrece el soporte académico que respalda las decisiones metodológicas y didácticas del estudio.

A continuación, se expone el marco conceptual, en el que se definen las categorías centrales de análisis, entre ellas, fracciones, aprendizaje significativo, práctica pedagógica e Ingeniería Didáctica, lo que garantiza precisión terminológica y coherencia en el uso de los conceptos a lo largo de la investigación.

El marco contextual, se describen las condiciones sociales, pedagógicas y académicas que inciden en el aprendizaje de las matemáticas, particularmente de las fracciones. Este análisis es clave para comprender el entorno en el cual se implementa la propuesta didáctica.

Finalmente, se incluye el marco legal y normativo, en el que se revisan las disposiciones que orientan la enseñanza de las matemáticas en la educación básica, asegurando la coherencia del estudio con las políticas educativas vigentes y con los lineamientos curriculares establecidos.

2.1. Estado del arte: Marco histórico y Actual.

2.1.1. Antecedentes históricos de la noción de fracción.

La historia de las fracciones constituye un elemento fundamental para comprender por qué su enseñanza sigue siendo un reto. Desde la Antigüedad, civilizaciones como los babilonios y egipcios utilizaron sistemas fraccionarios con fines prácticos, vinculados al comercio, la medición del tiempo y la organización agrícola. Los babilonios desarrollaron un sistema sexagesimal hace más de 4.000 años, que permitía cálculos astronómicos y mediciones precisas, mientras que los egipcios (alrededor del 3.000 a.C.) usaban fracciones unitarias ($1/2$, $1/3$, $1/4$, etc.), que representaban partes únicas de un entero y eran registradas en papiros como el de Ahmes. Estos usos tempranos evidencian que la fracción surgió como herramienta cultural antes de consolidarse como objeto matemático formal.

Durante la Edad Media, la introducción del término *fractio* al latín por Juan de Luna, a partir de la traducción de la aritmética de Al-Juarizmi, no solo significó un cambio lingüístico, sino también conceptual: permitió reconocer a la fracción como *parte de un todo*, noción que aún permanece en el ámbito escolar (Andonegui, 2006). Seguidamente y con la consolidación de las matemáticas modernas, matemáticos como Simón Stevin (1585) e Isaac Newton (1707) reconfiguraron su estatus: Stevin por su lado insistía en la equivalencia entre fracciones y números, enfatizando su papel como medida, mientras que Newton la definió en términos de relación cuantitativa de la parte con el todo. Estos aportes sentaron las bases para concebir a la fracción como número y no solo como la representación de una partición.

Este recorrido muestra cómo la fracción ha pasado de ser un recurso práctico a constituirse en una noción formalizada en la matemática escolar. Sin embargo, el peso de esa historicidad todavía se refleja en la enseñanza: la fracción se introduce en la escuela bajo múltiples significados: parte-todo, medida, cociente, razón, número racional que, aunque enriquecedores, suelen dificultar su aprehensión por parte de los estudiantes (Solarte, 2018).

2.1.2. Problemáticas persistentes en la enseñanza y el aprendizaje.

La complejidad conceptual de la fracción ha sido documentada ampliamente en la literatura didáctica. Los alumnos suelen enfrentar obstáculos al intentar coordinar sus diferentes significados: por ejemplo, entender una fracción como cociente entre dos números enteros no siempre se conecta con verla como número en la recta numérica o como razón entre magnitudes. Estas transiciones generan errores persistentes, como confundir el denominador con la cantidad total de objetos o interpretar la fracción solo desde representaciones concretas.

Investigaciones internacionales (Fazio y Siegler, 2011; Kieren, 1988) y nacionales (Solarte, 2018; Andonegui, 2006) han demostrado que tales dificultades repercuten directamente en el desempeño posterior en matemáticas avanzadas, pues la comprensión de las fracciones es un prerrequisito para el álgebra, la proporcionalidad y el cálculo. De hecho, los resultados de PISA y de las Pruebas SABER en Colombia reflejan que las competencias en fracciones constituyen un cuello de botella en la educación básica, donde muchos estudiantes logran manipular símbolos, pero no consolidan significados profundos.

A esto se suma la fragmentación didáctica en la enseñanza: en muchas aulas se privilegia el algoritmo (suma, resta, multiplicación y división de fracciones) sin atender la comprensión conceptual. La literatura resalta, además, la dificultad de los docentes para articular diferentes significados en secuencias progresivas (Esparza-Rodríguez y Lizarde-Flores, 2021) lo que perpetúa el problema.

2.1.3. Investigaciones recientes y enfoques metodológicos pertinentes.

En este escenario emergen propuestas innovadoras como la Ingeniería Didáctica (ID), que articula el análisis del contenido matemático con el diseño, experimentación y validación de secuencias. No obstante, la revisión de la literatura muestra que son escasos los trabajos que apliquen ID en el contexto de fracciones, y más aún aquellos que lo articulen con técnicas estadísticas robustas como los Modelos Mixtos Lineales Generalizados (MMLG). A continuación, se presentan los principales antecedentes, clasificados en internacionales y nacionales.

2.1.3.1. Antecedentes internacionales.

Un primer trabajo fue desarrollado en Alemania por Reinhold et al. (2020), Con una muestra de 1005 estudiantes de sexto grado, evaluaron tres modalidades de enseñanza de fracciones: método tradicional, currículo adaptado con ID en formato impreso y currículo adaptado con ID apoyado en TIC. El análisis mediante MMLG mostró que los estudiantes de bajo rendimiento obtuvieron mejoras significativas con ID, mientras que los de alto rendimiento tuvieron avances similares en todas las modalidades. Este estudio es relevante porque combina ID con análisis estadístico riguroso, aportando evidencia empírica sobre la eficacia diferencial de las intervenciones.

Una segunda investigación realizada en España por Bataller (2019), muestra la relación entre el aprendizaje del dibujo técnico y el rendimiento matemático en secundaria, aplicando un diseño cuasiexperimental con MMLG. Aunque no centrado exclusivamente en fracciones, su valor radica en mostrar cómo los diseños de grupo control no equivalentes pueden aplicarse a estudios educativos reales, ofreciendo un referente metodológico aplicable al presente proyecto.

Así mismo Block et al. (2024), Implementaron secuencias de ID con estudiantes de 6° y 7° grados en México para favorecer la transición de razones a fracciones, usando la teoría de situaciones de Brousseau. Los resultados mostraron que el juego y la

experimentación ayudaron a los estudiantes a construir significados más sólidos de la noción de fracción como razón. El mismo autor, desarrolló una actividad lúdica denominada: *el salto de la rana* para la enseñanza de la proporcionalidad en estudiantes de 5° grado. A través de la ID, se observó cómo el trabajo colaborativo y la retroalimentación del profesor fomentaban la construcción progresiva del concepto de razón (Block, 2021).

Por su parte Arteaga-Martínez et al. (2022), desarrolló un trabajo de investigación conjunto en España y Chile, en el que aplicaron una propuesta ID con el uso de relojes digitales y el sistema sexagesimal. Este enfoque intercultural permitió mostrar las dificultades de los estudiantes al enfrentarse a sistemas no decimales, pero también la riqueza didáctica de recurrir a contextos culturales diversos para el aprendizaje de las fracciones.

En ese orden de ideas, Alva y Solis (2019), en Perú, aplicaron las fases de la ID (análisis preliminar, diseño a priori, experimentación, análisis a posteriori) con estudiantes de nivel básico, enfocándose en los diferentes significados de la fracción (parte-todo, cociente, medida, número racional). Concluyeron que los estudiantes mantenían una fuerte tendencia a concebir la fracción únicamente como parte-entero, lo que dificultaba su ubicación en la recta numérica. Finalmente Esparza-Rodríguez y Lizarde-Flores, (2021), estudiaron el conocimiento didáctico especializado de profesores de primaria al aplicar una ID sobre problemas multiplicativos con fracciones, en una escuela primaria, en el que hallaron que la estructuración progresiva de tareas favorece la aprehensión conceptual y mejora las prácticas de enseñanza.

2.1.3.2. Antecedentes nacionales.

En el contexto colombiano, la investigación sobre la enseñanza de las fracciones ha estado vinculada tanto a estudios empíricos sobre dificultades de aprendizaje como al análisis de resultados en pruebas estandarizadas, por ejemplo Ríos (2009), uno de los primeros en explorar la aplicación de la Ingeniería Didáctica en fracciones en Colombia.

Aunque su población estaba compuesta principalmente por docentes, el estudio es relevante porque sentó bases metodológicas en el país para considerar la ID como un enfoque riguroso en la enseñanza de las matemáticas.

Así mismo, las Evaluaciones nacionales (ICFES – Pruebas SABER 5° y 9°), en diversos informes han mostrado históricamente bajos desempeños de los estudiantes en los componentes de números y operaciones con fracciones, señalando este contenido como una de las principales dificultades en educación básica. Estos hallazgos han motivado investigaciones locales orientadas a mejorar la enseñanza de fracciones mediante recursos didácticos, aunque pocas aplican formalmente la ID.

Es así como una investigación local fue desarrollada por el autor de la tesis (Cano, 2014), la cual consistió en aplicar una secuencia didáctica con estudiantes de 4° grado para la enseñanza de las fracciones en el municipio de Supía Caldas, los resultados evidenciaron dificultades en el aprendizaje de las fracciones, en especial en la resolución de problemas que involucraban operaciones entre fracciones heterogéneas.

2.1.4. Brechas de conocimiento y oportunidad de investigación.

De lo expuesto se concluye que:

1. La fracción es un concepto con raíces históricas y culturales profundas, cuya complejidad sigue impactando su enseñanza en primaria.
2. Persisten problemas de aprendizaje relacionados con la multiplicidad de significados y la insuficiente articulación didáctica en las aulas.
3. Existen propuestas recientes con Ingeniería Didáctica, pero la mayoría se concentra en secundaria y con poblaciones pequeñas, sin un uso sistemático de técnicas estadísticas rigurosas.
4. Hay una ausencia de investigaciones en primaria que combinen ID con MMLG en contextos reales, lo que representa una oportunidad para producir conocimiento empírico y replicable.

En este sentido, el presente estudio doctoral se posiciona en esa brecha: diseña, implementa y evalúa una propuesta de enseñanza de las fracciones basada en ID para estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa Supía, empleando MMLG para contrastar empíricamente su impacto. Con ello no solo se diagnostica, sino que se busca transformar la práctica pedagógica, favoreciendo aprendizajes significativos y aportando lineamientos transferibles a otros contextos escolares.

Sin embargo, a pesar de los avances evidenciados en la literatura, persisten vacíos relevantes que requieren ser atendidos. Por un lado, muchos estudios se limitan a describir las dificultades de los estudiantes sin ofrecer soluciones pedagógicas innovadoras que puedan ser validadas empíricamente. Por otro, las propuestas que aplican la Ingeniería Didáctica no siempre logran trascender el diseño teórico hacia escenarios de intervención real con grupos numerosos y diversos, lo que restringe su aplicabilidad. En consecuencia, la presente investigación asume una postura crítica frente al estado actual del conocimiento, al plantear que aún no se han explorado de manera suficiente los efectos de la ID en la educación primaria, en contextos de vulnerabilidad y con un análisis estadístico robusto como el MMLG.

De igual manera, esta tesis busca subrayar su aporte novedoso y original al no limitarse a replicar lo ya hecho, sino al proponer una articulación entre teoría didáctica, diagnóstico empírico y modelación estadística rigurosa. Esto significa que la propuesta se convierte en un referente que no solo diagnostica y describe, sino que genera un modelo replicable de enseñanza de fracciones que responde a problemáticas reales del sistema educativo colombiano. En este sentido, la originalidad del trabajo radica en que combina la tradición teórica de la Ingeniería Didáctica con herramientas metodológicas avanzadas, en un escenario escolar concreto y con una proyección hacia la mejora de políticas y prácticas docentes.

2.2. Marco teórico.

El presente Marco Teórico tiene como propósito ofrecer los fundamentos conceptuales y metodológicos que sustentan esta investigación, la cual se orienta a transformar la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones en la educación básica primaria mediante la aplicación de la Ingeniería Didáctica. En este capítulo se presentan las principales categorías que guiarán el análisis: la conceptualización de las fracciones, las dificultades y obstáculos asociados a su enseñanza y aprendizaje, y los fundamentos teóricos y metodológicos de la Ingeniería Didáctica como enfoque para diseñar, implementar y evaluar propuestas innovadoras en el aula. En este sentido, la Ingeniería Didáctica se asume como la perspectiva teórica central que articula el análisis y fundamenta tanto el diseño como la validación de la propuesta, diferenciando este estudio de aquellos que se limitan a describir dificultades o aplicar estrategias didácticas aisladas.

La organización de este apartado sigue una lógica progresiva: en primer lugar, se revisan las contribuciones de teóricos relevantes que han estudiado el concepto de fracción desde diversas perspectivas, como: la mirada fenomenológica de Hans Freudenthal, los aportes cognitivos de Robert Siegler y Lisa Fazio, y el modelo constructivista de comprensión de Pirie y Kieren. En segundo lugar, se abordan las principales dificultades y obstáculos que enfrentan estudiantes y docentes en torno a la noción de fracción, considerando tanto los significados parte-todo, medida, razón y operador, como las limitaciones derivadas de prácticas de enseñanza tradicionales.

Posteriormente, se analizan los aportes de la didáctica de las matemáticas en relación con el conocimiento didáctico del contenido y la formación del profesor, resaltando la importancia de comprender los procesos de planificación, instrucción y evaluación. Finalmente, se desarrollan los fundamentos de la Ingeniería Didáctica, sus fases y su articulación con la teoría de las situaciones didácticas, los cuales constituyen el marco metodológico de esta investigación.

En suma, este capítulo no solo describe antecedentes y enfoques teóricos, sino que establece las bases que orientan el diseño y la validación de la propuesta didáctica que aquí se plantea. De esta manera, el Marco Teórico conecta directamente con los objetivos de la investigación, al ofrecer el andamiaje conceptual y metodológico que

sustenta la innovación en la enseñanza de las fracciones y su posterior evaluación mediante métodos rigurosos.

2.2.1. La conceptualización de las fracciones vista desde varios teóricos.

Es amplia la literatura que existe sobre métodos particulares para la enseñanza de las fracciones, en el campo específico de una metodología, existen teóricos como Hans Freudenthal (1983), Robert Siegler y Lisa Fazio (2011), Thomas Kieren y Susan Pirie (1994), quienes hacen aportes significativos desde el campo epistemológico, psicológico y de la didáctica, es a partir de estos autores que se va a fundamentar los conceptos de la noción de fracción.

En síntesis, aunque los autores coinciden en resaltar la importancia de la representación múltiple y la comprensión conceptual de la fracción, persisten tensiones en la transición desde el significado parte-todo hacia la concepción de fracción como número racional. Esta investigación reconoce esas convergencias y discrepancias como punto de partida, situando la propuesta didáctica como respuesta a dichas limitaciones.

2.2.1.1. La mirada fenomenológica desde la perspectiva de Freudenthal.

Para dar comienzo, deseo remitirme al concepto mismo que empleó Freudenthal (1983b), para describirla: “Las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional – una fuente que nunca se seca” (p. 2). De acuerdo con el autor las fracciones son un número racional, es decir un conjunto numérico bien particular que se define como la razón de un número “a” entero y otro número “b” entero, el cual se describe cómo a/b siendo $b \neq 0$. Esta particular notación es la que se enseña en la escuela básica secundaria. Parece ser que ese concepto de fracción como partidor y/o quebrado que se aprende en la escuela primaria acabase y de un salto aparecen los números racionales, es decir aquellos que se expresan como una razón.

De acuerdo con Freudenthal, acá subyace una dificultad con respecto al concepto de fracción y afirma que sería más conveniente que desde la escuela la fracción se enseñara como razón. Este camino complejo está altamente tortuoso al momento en el que los chicos dejan de percibir los números naturales y se les presenta como el cociente mismo de ellos, es de esta manera que surge una primera dificultad al sumar fracciones y es que los estudiantes asumen una suma lineal de varios números naturales, por ejemplo, si se les presenta la fracción $\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$ al realizar la operación muchos aprendices expresan que su valor es 5/8. Esta carencia tiene una raíz clara y es que ven la fracción como un todo y no como una parte de la unidad.

Es por esta razón que el autor quiso expresar el concepto de fracción desde la postura fenomenológica así:

1. Las fracciones en el lenguaje cotidiano: hace referencia a las formas como son usadas comúnmente en el lenguaje cotidiano, por ejemplo: la mitad de, un tercio de, dos y un medio de veces de, la tercera parte de un, cinco veces de un, coger dos tercios de, siete veces de largo más que, rodar un tercio de vuelta, tres paquetes de cinco kilogramos, tres partes de agua y dos partes de sal, cada cinco saltos ganas, siete partes de nueve. Estas formas coloquiales según Freudenthal, son formas cotidianas para expresar el concepto, más no para representarlo y esto pone de manifiesto cierta dificultad para entender la parte – todo y para realizar las mismas operaciones, debido a que las fracciones se comparan con medidas, con acciones y no específicamente como una razón.

2. Las fracciones como fracturador: este aspecto es mucho más complejo dado que son muchas las formas, igualmente desde el mismo lenguaje y en las acciones cotidianas, que se expresan como fracturadores, por ejemplo: Doblar en cuatro partes, partirlo por la mitad, repartir un refresco en partes iguales, este concepto lo denominó el autor como “a ojo por tacto”(p. 9), y es muy usado al momento de hacer cualquier reparto, pero la dificultad no es expresarlo, es cuando se pide hacerlo, lo hacen sin ningún patrón, caso clásico el de repartir una naranja en dos, en dónde simplemente toman la fruta y la seccionan sin visorar si el reparto está bien realizado. Pero la preocupación misma es

que “los psicólogos del desarrollo no han prestado ninguna atención a este aspecto”(Freudenthal, 1983b, p. 9)

3. Las fracciones como comparadores: de acuerdo en lo expresado anteriormente el lenguaje cotidiano sirve de conceptualización de las fracciones, y es quizás otra de las maneras en las que este conjunto numérico es visto, como un comparador, ejemplo: En una habitación hay dos tercios de hombre más que de mujeres, la altura de la escalera es la mitad de la altura de la pared de este cuarto, esta forma de expresar presenta dificultades ya que la persona puede darse cuenta completamente que comparar con “respecto al número o valor de una magnitud precede a la comparación con los propios números o valores de magnitudes” (Freudenthal, 1983b, p. 15) y que de esta manera esta impronta queda determinada y entendida sin ninguna explicación con respecto a la medida misma.

Por otro lado, el autor expone como la didáctica tradicional se ha centrado en mostrar a la fracción como un operador fracturante, del cual se pasa de manera directa a la conceptualización de número racional, sin mostrar el operador razón que es el sumun de los números racionales.

2.2.1.2. La perspectiva cognitivista acerca de las fracciones: Siegler y Fazio.

El profesor Robert Siegler es un reconocido psicólogo cognitivo que ha desarrollado varias investigaciones en la Universidad de Carnegie (EE. UU) sobre cómo los niños aprenden y resuelven problemas de matemáticas, por su parte la doctora Lisa Fazio, igualmente profesora de la Universidad de Carnegie, ha desarrollado algunas investigaciones acerca del aprendizaje de los números enteros y las fracciones en estudiantes de 6° grado. Ambos autores recopilaron algunas de sus obras y con el apoyo de La Academia Internacional de Educación (IAE) y la UNESCO escribieron un texto titulado: Enseñanza de las fracciones (Fazio y Siegler, 2011), y con el cual se desarrollan en este apartado algunas de sus ideas más importantes.

No es mito afirmar, que el problema sobre las dificultades de la comprensión de las fracciones obedece a un aspecto meramente conceptual. Los autores dicen que desde los 4 años los niños son capaces de realizar repartos equitativos, por ejemplo: repartir 12 dulces de chocolate entre un niño y 3 de sus compañeros, este reparto lo realiza a partir de un conjunto de 12 dulces en cuatro subconjuntos de tres elementos, esta repartición equitativa bien podría servir para más adelante introducir el concepto de razón. Como se observa en la figura 1, se muestra una posible manera de cómo un niño hace la representación gráfica de la repartición aún sin entender la representación numérica.

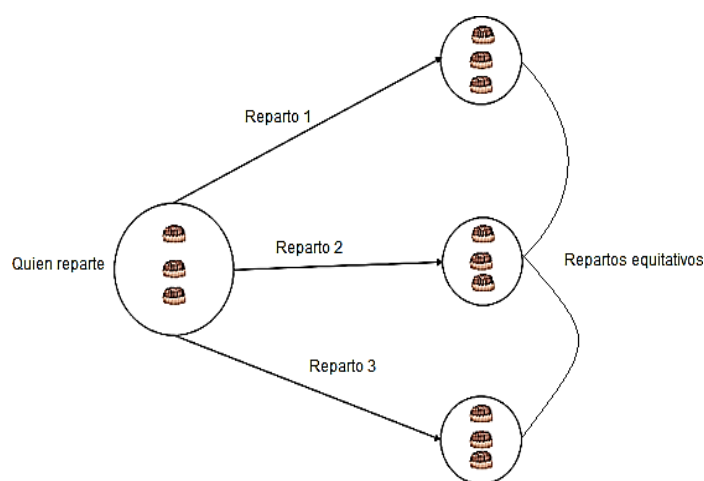


Figura 1.

Repartición equitativa de dulces de chocolate realizadas por un estudiante.

Nota. Elaboración propia.

A los 5 años, tienen la posibilidad de repartir un único objeto entre varios amigos, por ejemplo una chocolatina y a los seis años ya logran asociar y comparar figuras geométricas o formas de su cotidianidad con repartos proporcionales, el caso más común es la mitad ($1/2$) de una naranja, “este conocimiento temprano puede ser utilizado para introducir el concepto de fracción, conectando el conocimiento intuitivo de los estudiantes a conceptos de fracciones formales” (Fazio y Siegler, 2011, p. 8).

Recalcan por otro lado que las fracciones son números y que necesitan ser comprendidas como una magnitud, por ejemplo $1/2$ es la magnitud de $2/4$ de $4/8$, sin embargo los enfoques de enseñanza siguen con las conceptualizaciones anacrónicas de que la fracción es la representación de un entero, es decir $1/3$ es la tercera parte de un entero dividido en tres partes y este aprendizaje aunque no es erróneo, si tiene repercusiones al momento de representar una fracción mayor a un entero como por ejemplo $5/2$. Concluyen que para evitar esta dificultad las fracciones deben representarse en rectas numéricas para tener una auténtica correspondencia con una magnitud.

Así mismo explican la forma como una fracción sirve para medir objetos que no representan enteros con mayor precisión, los estudiantes deben percatarse que el objeto no cambia de tamaño pero que lo pueden medir con mayor precisión si reparten la unidad en pedazos más pequeños de tal manera que estén contenidos dentro del tamaño del objeto.

De otra parte, abogan para que el maestro utilice la recta numérica al momento de impartir la enseñanza para que puedan encontrar fracciones equivalentes, por ejemplo, ubicar la fracción $2/4$ y posterior a ello $1/2$ y que ellos se percaten que ambas fracciones tienen la misma magnitud y que su valor canónico es $1/2$. Concluyen que la recta numérica es muy útil ya que sirve para demostrar el concepto de densidad de la fracción, que es una “característica en que difieren las fracciones respecto de los números enteros, y es que hay un número infinito de fracciones entre otras dos fracciones” (Fazio y Siegler, 2011, p. 11).

En cuanto al papel del profesor su labor es la de enfocar su enseñanza en el desarrollo y comprensión conceptual junto a la fluidez procedimental, y una buena forma de hacerlo es con apoyo de material didáctico manipulativo y con el uso de representaciones visuales, estas son de gran apoyo para la realización de las operaciones de suma, resta, multiplicación y división.

Por otro lado, creen que muchos de los errores que cometen los estudiantes al momento de operar con las fracciones, se podrían evitar si estiman sus respuestas antes de intentar

utilizar un algoritmo formal. Para Fazio y Siegler la estimación es el proceso mediante el cual se hace una aproximación de la fracción a un decimal o por medio de la amplificación o simplificación se busca que dos fracciones tengan un mismo denominador, concluyen que este proceso no es sencillo para muchos estudiantes, sin embargo, es el maestro el que debe apoyar el proceso, ya que los estudiantes pueden mejorar sus conocimientos sobre magnitudes de fracciones y su comprensión de fracciones aritméticas. “La estimación obliga a los estudiantes a pensar en sus respuestas y permite que éstos se enfoquen en el significado de sumar y multiplicar fracciones, en lugar de seguir una regla memorizada sin comprenderla.” (Fazio y Siegler, 2011, p. 14).

En sus estudios han descubierto que los errores que mayormente cometen los estudiantes cuando operan con fracciones tienen que ver con el tratamiento del numerador y el denominador de la misma pues los ven como dos números enteros separados y al momento de hacer sumas y restas operan como si fuesen números enteros, otro error muy común es al momento de realizar multiplicaciones de fracciones homogéneas, operan solo el numerador y dejan el mismo denominador por ejemplo, al multiplicar $2/3 \times 1/3$ solo aplican la operación al numerador y no se la aplican al denominador, dándoles por resultado $2/3$ y no $2/9$ que es la forma correcta.

Sugieren que los maestros al momento de presentar problemas con fracciones no lo hagan aplicando simples algoritmos, este proceso se debe presentar con situaciones de la vida diaria, por ejemplo, con recetas de comida, o con reparticiones, igualmente al momento que se vaya volviendo más complejo este proceso o se vaya avanzando en el mismo los estudiantes primero deben entender el razonamiento proporcional ya que es fundamental para comprender tasas de cambio, razones y proporciones. Finalmente, “es importante que los estudiantes aprendan a resolver problemas de razonamiento proporcional utilizando sus propias estrategias intuitivas, antes de aprender el algoritmo de multiplicación cruzada”(Fazio y Siegler, 2011, p.19).

2.2.1.3. La Teoría constructivista de Susan Pirie y Thomas Kieren.

Susan Pirie y Thomas Kieren, son dos profesores estadounidenses que en el año de 1989, propusieron un modelo para la comprensión, con enfoque constructivista para el aprendizaje de las matemáticas (Arenas, 2018). Este modelo se caracteriza por que no es lineal, y su importancia radica en que logra describir el proceso de la comprensión matemática, de una forma dinámica, recursiva y nivelada. (Pirie y Kieren, 1994).

El modelo fue estructurado por sus autores en ocho niveles, entre los cuales se puede circular de manera libre, algo muy parecido con los niveles de Van – Hiele, es decir puedo estar en varios niveles sin tener que pasar por todos.

El modelo permite hacer una construcción acerca de la noción de la comprensión matemática, cuyo interés ha sido bien particular desde el campo de la psicología, para los autores la comprensión matemática se puede definir:

(...) como nivelada (estable) pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursión se observa cuando el pensamiento se mueve entre niveles de sofisticación. De hecho, cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende de las formas y procesos del mismo y, además, se encuentra restringido por los que están fuera de él (Pirie Kieren, 1994, citado por Arenas, 2018, p. 33)

La importancia de esta propuesta fue que nació a partir de un caso particular sobre el aprendizaje de las fracciones. El modelo plantea tres características muy importantes que permiten que sea dinámico y tenga carácter de circularidad, la primera es que posee una cualidad parecida a la de un fractal (fractal-like quality), esta característica es la que permite deducir que dicha comprensión no es limitada, ni tampoco finita, sino “recursiva” (Arenas, 2018, p. 36).

La segunda característica se denomina el redoblar o devolverse hacia atrás (Folding back), y es considerada la más importante de las cuatro dado que está en un nivel de

comprensión externo al modelo, y de acuerdo con el folding back, vuelve al interior donde se encontraba, haciendo una revisión nuevamente de la comprensión, pero con una forma más profunda, se identifica cuando una persona que está en un nivel de comprensión exterior del modelo, vuelve a un nivel interior al que ya estaba, para realizar una reexaminación de la comprensión, pero de una forma más enriquecida a la que tenía cuando trabajó en ese nivel, en palabras de los autores no es lo mismo volver al nivel, este proceso es más complejo dado que el aprendizaje siempre estará necesitando de saberes o conocimientos que están dentro de los niveles y que son necesarios para continuar, un caso particular sobre el conocimiento primitivo de las fracciones al realizar un folding back, el estudiante deberá buscar relaciones de orden mediante una recta numérica para mirar la forma decimal de una fracción y comprender que fracción es mayor o menor con respecto a otra.

Finalmente, la característica denominada fronteras no necesarias o límites de falta de necesidad ('Don't need' Boundaries), permite que el estudiante avance entre cada uno de los niveles a veces sin percatarse que ha realizado un redoblaje, para los autores es muy importante este nivel ya que cuando un estudiante logra avanzar en las fronteras, ya no está en la capacidad de estar pensando en la construcción del concepto que realizó en los niveles anteriores, ya que lo ha superado y comprendido (Pirie y Kieren, 1994).

El modelo de Pirie y Kieren está dividido en 8 niveles, como se observa en la figura 2, el más interior se denomina Conocimiento primitivo (Primitive Knowing) y a partir de este van apareciendo los siguientes niveles descritos en círculos tangentes así: Creación de imagen (Image making), comprensión de la imagen (image having), observación de la propiedad (property noticing), formalización (formalizing), observación (observing), estructuración (structuring), invención (investing). Cada dos niveles se puede presentar un proceso de folding back o en su defecto presentarse una frontera no necesaria.

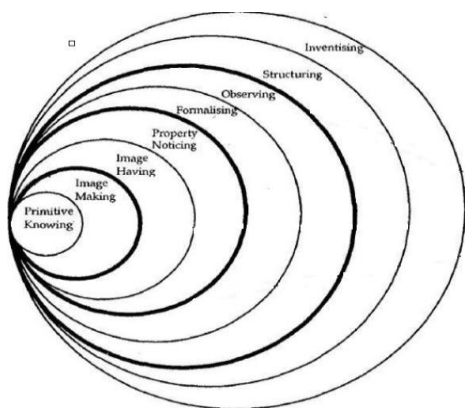


Figura 2.

Niveles del modelo constructivista de Pirie y Kirien.

Nota. Modelo Tomado de Pirie y Kieren (1994, p. 170)

Este modelo surgió con base en el trabajo de investigación con niños entre 7 y 9 años, en relación con el tema de las fracciones bajo un modelo de aprendizaje constructivista, es así como los autores afirman que para obtener un conocimiento integral del número racional es necesario que los estudiantes interconecten cada idea de manera previa para ser comprendida, o sea partir desde el conocimiento previo haciendo un folding back (Higuera, 2022).

Según Kieren (1988), el aprendizaje de la fracción solo puede ser visualizado a partir de la idea de constructo, que es la acción por la cual un sujeto aprehende del mundo los objetos mentales y concibe su entendimiento de las fracciones por subconstructos, un ejemplo de ello la relación que existe entre la “parte-todo y la razón” (Kieren, 1976), es de esta manera que propuso una manera gráfica sobre el cómo se puede comprender los números racionales, en la Figura 3 se muestra el esquema de constructo de los racionales propuesto por Kieren.

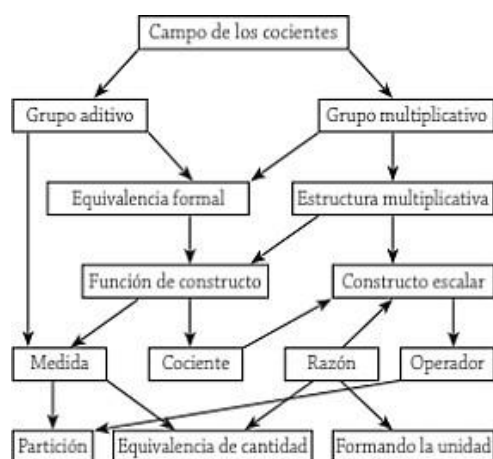


Figura 3.

Esquema del constructo de los números racionales según Kieren.

Nota. Esquema de constructo de los racionales según Kieren. (Higuera, 2022, p. 79).

Por otra parte propuso dos mecanismos mentales para que el aprendiz pudiera construir el concepto de número fraccionario, y son: El desarrollo que permite vincular la experiencia y se identifica con “la conservación del todo y el razonamiento proporcional”(Higuera, 2022, p. 79) y el constructivo que se vincula con la partición de un entero y su equivalencia como resultados de unidades que se pueden dividir.

2.2.2. Obstáculos y dificultades en el aprendizaje de las fracciones.

Sobre este tópico en particular existen variados estudios que enfatizan sobre problemas en la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, al respecto Pruzzo de Di Pego (2012), enfatiza que el mayor problema del aprendizaje de las fracciones se debe a la enseñanza. En una investigación realizado con 433 estudiantes de primer año de secundaria en Argentina, los chicos manifestaron tener “lagunas de aprendizajes y errores conceptuales

severos sobre nociones de Nivel Primario, lagunas y errores inducidos desde una enseñanza irrelevante” (Pruzzo de Di Pego, 2012, p. 2).

Entendiéndose las lagunas de aprendizajes, como aquellos contenidos que nunca fueron enseñados o que se omitieron por parte del profesor y/o que nunca fueron aprendidos por los estudiantes, en este caso particular la autora determina que una gran dificultad con el aprendizaje de la parte – todo en las fracciones, obedece a lo que ella misma denomina laguna de aprendizaje y que en la mayoría de los casos se debe a la falta de conceptualización por parte del maestro, es decir a errores conceptuales inducidos en la enseñanza, dificultad que más adelante obstaculiza el conocimiento algebraico vinculado con los números racionales. De acuerdo con la autora una enseñanza irrelevante es “aquella que pierde de vista principios básicos de la Didáctica especialmente aquel que señala que la enseñanza custodia el aprendizaje a través de la evaluación” (Pruzzo de Di Pego, 2012, p.3).

De otra parte Cortina (2014), afirma que el estudio de las fracciones en el campo de la didáctica de las matemáticas es uno de los que mayor interés ocupa a los investigadores de todas las latitudes, tanto así que autores destacados como Brousseau y Freudenthal han hecho aportaciones significativas al respecto, continúa además afirmando que en el largo estado de arte son 4 las preocupaciones más importantes que son consideradas en los trabajos de investigación con respecto a la enseñanza y aprendizaje de las mismas; la primera responde a la conceptualización didáctica del concepto, si bien es un aspecto que desde lo epistemológico en el campo de la enseñanza se ha visto restringido al objeto matemático y su forma de ser enseñada, su noción se ha visto restringida al menos a cuatro significado teóricos en los que concuerdan mayormente los autores: parte-todo, medida, razón y operador; la segunda preocupación hace referencia a la forma como se identifican y se describen los esquemas mentales resultado del aprendizaje y a la forma como estos son desarrollados, si bien es en ellos se ha identificado y descrito la relativa complejidad conceptual, para concebir a las fracciones como números que cuantifican el tamaño de una magnitud continua, es aún más complejo entenderlos como una magnitud discreta, ya que ven la fracción como una magnitud entera y no como sus partes discretas; la tercera tiene que ver con la variedad

de propuestas para la enseñanza y el aprendizaje del concepto, todas ellas con recursos áulicos variados que van desde el uso de situaciones problémicas, hasta la implementación de recursos mediados con las TIC; finalmente la cuarta preocupación está vinculada con uno de los aspectos más álgidos y tiene que ver con la evaluación, la mayoría de trabajos que abordan la comprensión del concepto han sido de corte cuantitativo y en los que se ha demostrado que son bajos los desempeños de la mayor parte de los estudiantes al respecto.

Ahora bien, desde el campo de la didáctica el concepto de obstáculo fue descrito por Bachelard (1971), como un apego que impide el avance de la ciencia. En otras palabras “el desarrollo del conocimiento, errores, prejuicios, opiniones de los docentes son transmitidos al estudiante y estos se convierten en obstáculos epistemológicos” (Castro et al., 2010, p. 2), de acuerdo con lo anterior es posible que muchos obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas tengan que asociarse con la enseñanza, desde este punto de partida es que se enfocarán las concepciones sobre los 4 significados que anteriormente describió Cortina (2014) y son: La parte- todo, la medida, la razón y el operador, acerca del concepto de fracción.

2.2.2.1. Obstáculos y dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de fracción como parte-todo.

Llinares et al. (1994), reconocen que los niños al comienzo trabajan la relación parte-todo de manera cualitativa en situaciones de la cotidianidad, luego la empiezan a utilizar en el contexto continuo-área de acuerdo con unos atributos, el primero es que el todo lo conforman compuestos separados, es decir que una región se ve como algo divisible, el segundo atributo obedece a que dicha región se puede separar por una infinidad de partes n , es decir un todo se puede partir en varias partes, lo tercero es que esas partes cubren el todo, así mismo el número de partes no coinciden con el número de cortes, lo cuarto que las partes son iguales o sea son congruentes, lo quinto es que esas partes son la totalidad y por último el todo se conserva.

Estos atributos son esenciales en la definición de la fracción como parte-todo. Sin embargo, los mismos mal orientados al momento de ser enseñados por parte del profesor podrían ser un obstáculo o limitación en la equipartición, debido a que un objeto puede ser transformado por la acción de ser partido como las partes del todo y no como elementos discretos generando dificultades en su reutilización.

Otro aspecto que puede presentar alguna dificultad tiene que ver con el tamaño relativo de un entero en “el que se tenga presente lo que implica ser menor que, igual que o mayor que un entero” (Talero, 2020, p. 23), otra dificultad obedece a lo que Freudenthal, (1983b) describe como un acto primitivo y lo llamó a ojo por tacto y que consiste en desatender la medida correcta un caso bien particular es cuando una persona parte una naranja en dos sin verificar si las dos medias partes son iguales.

2.2.2.2. Obstáculos y dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de fracción como medida.

De acuerdo con Quintanilla y Gallardo (2021) existe una complejidad en la comprensión de la fracción acerca del “concepto de medida y de los procedimientos involucrados al medir cantidades de magnitudes” (p. 1)

Una primera dificultad radica en la casi eliminación del concepto de medida en los libros de texto, que son los referentes para la enseñanza de una gran parte de maestros en todo el mundo, la fracción como parte-todo la ha sintetizado a tal punto que ya no se nota su diferencia, es decir al expresar una fracción a/b se olvida que b son tantas partes de a y que esta representa una medida de un entero.

Por otro lado, la excesiva aritmetización por parte de los profesores, ha hecho que las expresiones de la fracción como medida se convirtieran en un aspecto de poca relevancia ya que al operar dos o más fracciones el aspecto de la medida no es relevante en cambio si la operación, por ejemplo si se suma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ el valor de la medida sería $\frac{3}{4}$ de la unidad,

y no simplemente la fracción 3 partes de 4, acá prima la concepción de fracción como parte-todo, y ese no es sólo el problema si dicha cantidad fuese expresada como decimal, el obstáculo es más relevante dado que muchos profesores ven los decimales como un conjunto aparte y al momento de enseñarlo no lo asocian con la fracción.

Otro obstáculo que no permite un correcto uso de la medida radica en el momento de hacer particiones dado un patrón, los estudiantes no reconocen que una figura se puede partir en n partes si el patrón no es un objeto regular, además existe la creencia que si una fracción no se reparte mediante partes homogéneas su medida no será posible ser representada, lo que Quintanilla y Gallardo (2021) denominan: la partición dada no se puede modificar, el cual se puede apreciar en la Figura 4.

Tomando como unidad el área de la figura completa, indica la fracción que corresponde a la parte sombreada.

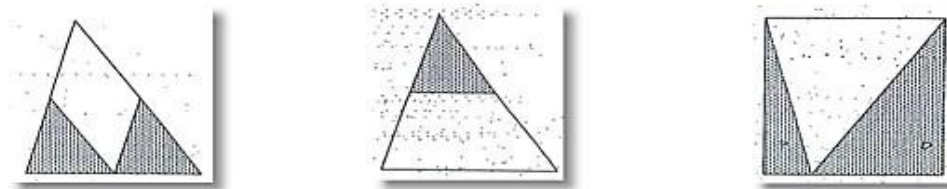


Figura 4.

Clásico problema de medida en el que las equiparticiones no se muestran de manera equitativa.

Nota. Tomado de Quintanilla y Gallardo Romero (2021, p. 9).

2.2.2.3. Obstáculos y dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de fracción como razón.

Kieren (1988), define la razón como la comparación numérica entre dos magnitudes, haciendo de esta un aspecto demasiado importante en el campo de los porcentajes y las probabilidades. Por otro lado, al emplear una razón se está realizando una comparación

entre dos cantidades que posteriormente se unen con otra razón formando una proporción, es además muy común encontrar cantidades que se expresan como razones o tasas de cambio ejemplo de ellos la pendiente de una recta es por eso que su uso en la enseñanza de la física, la geometría y el álgebra es fundamental.

Uno de los mayores obstáculos al momento de abordar el concepto de fracción como razón radica en su enseñanza, gran parte de maestros, al momento de aplicarlas en su clase no suelen hacer una diferenciación entre razón y fracción causando un quiebre conceptual, un ejemplo claro es cuando se comparan “los tamaños de colecciones de objetos de naturaleza diferente, y no tiene sentido pensar en un conjunto global que los contenga”(León, 2011, p. 9). Un claro ejemplo es cuando se dice que en un aula de hay 2 chicas por cada 3 chicos.

De otra parte, en la enseñanza del concepto de fracción como razón por parte del maestro se suelen limitar las oportunidades que representan las razones por varios motivos, el primero es que la razón no es vista como un resultado histórico que nació a partir de actividades comerciales debidas a la necesidad de comparar dos cantidades bien de una misma magnitud y lo que suele ser más complejo de dos magnitudes diferentes, siendo aún más interesante que dicho operación define una nueva magnitud que podría representar un porcentaje o una probabilidad.

El segundo es que se hace complejo pasar del concepto parte todo, donde se compara un cardinal con la unidad a comparar dos cantidades que suelen representar otras cosas, por ejemplo la concentración de una mezcla, la tasa de cambio de la aceleración, la semejanza entre dos triángulos, esta posibilidad de significar la fracción como razón, es considerada por los maestros como una de las formas más difíciles de abordar al momento de ser enseñada (Escolano y Gairín, 2005). De la misma manera para el estudiante aprender el concepto de razón es complejo ya que no tiene una relación clara de medida y comparación, es decir no se desliga fácilmente de la fracción como operador, claro está que esto se debe a que la didáctica y el profesor la restringen y sólo se quedan en el algoritmo y sí mucho en la representación pictórica de la misma.

2.2.2.4. Obstáculos y dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de fracción como operador.

De acuerdo con Herreros -Torres et al. (2022), el significado del operador en la fracción, muy a pesar de su destacada presencia en la enseñanza tanto en la escuela básica primaria como en los primeros años de secundaria, no aporta conocimientos básicos y tampoco es relevante en el aprendizaje, puesto que los estudiantes siguen enfrentados al algoritmo. El reconocimiento de la fracción y su operador está sujeto a reglas memorísticas en el mejor de los casos y en otros a recursos nemotécnicos que están muy alejados de la cotidianidad.

Un aspecto muy importante que serviría para paliar esta dificultad consiste en enseñar las fracciones desde la resolución de problemas, donde se propongan ejercicios y problemas en los que los estudiantes pongan a prueba la interpretación y no se convierta en la simple solución mediante el algoritmo.

Por otra parte una de las mayores dificultades a las que se ve abocado el estudiante al momento de pasar de un contexto de conteo en los naturales y aplicar las operaciones en los mismos, es enfrentarse a un monstruo llamado fracción, la posibilidad de comprender un número quebrado o partido que en ocasiones puede ser mayor o menor que la unidad y que además para realizar operaciones no se admite una cierta linealidad, se convierte en el primer obstáculo de la fracción como operador, esa difícil tarea se le encomienda al maestro que en ocasiones restringe el poder didáctico de emplear la resolución de problemas haciendo uso de múltiples registros de representación (Llinares y Sánchez, 1998; Parra-Cortés y Carmona-Ramírez, 2021) .

Otra dificultad se manifiesta con la operación de la multiplicación, en el que la mayoría de estudiantes confunden el procedimiento con el algoritmo de la suma, esto se debe a la forma mecánica de cómo lo aprenden, y que decir de la división al momento de hacer productos cruzados de extremos por medios, esto también se debe en la forma como el maestro expresa que para dividir “sólo debemos multiplicar” los extremos, este uso de lenguaje se convierte en un obstáculo didáctico (Herreros-Torres et al., 2022).

Finalmente, cuando un estudiante opera el producto de una fracción por un número natural o entero, generalmente realizan el algoritmo multiplicando tanto el numerador y el denominador por dicho entero, igual sucede cuando se les hace convertir una fracción impropia en un número mixto, estas dificultades se siguen evidenciando hasta en los primeros semestres de universidad.

2.2.3. La Formación del profesor: El Conocimiento del Contenido Didáctico.

Castro-Rodriguez y Rico (2017), afirman que la gran cantidad de expertos en este campo de la didáctica de las matemáticas, coinciden en hacer dos separaciones del concepto, por un lado, el conocimiento del contenido, que tiene que ver con el aspecto disciplinar de la matemática en la escuela, y por otro lado el conocimiento didáctico, que hace referencia a las herramientas que utiliza el profesor para planificar, enseñar y evaluar algún tópico específico de las matemáticas.

Es de esta manera que uno de los tópicos curriculares que más interés suscita en cuanto al conocimiento conceptual y didáctico de las matemáticas son las fracciones, dada la importancia de estas para abordar temas que son de estricto uso posterior, tales como la pendiente de una recta, la constante de proporcionalidad, los porcentajes, la tasa de cambio, las razones, entre otras.

Por su parte, Castro-Rodríguez y Rico (2017); y Lupiáñez (2010), plantean algunos componentes sobre los cuales se podría fundamentar la práctica docente del profesor de matemáticas, ellos son: La planeación curricular, que tiene que ver con el saber hacer, la forma como planifica su clase, las evaluaciones, la intervención en el aula, la metodología, los recursos y medios para transmitir ese conocimiento específico de las matemáticas, es decir el conocimiento didáctico. Por otro lado, el conocimiento disciplinar o del contenido, que se adquiere en su proceso de formación y que tiene que ver con lo cognitivo.

De acuerdo con Castro-Rodríguez y Rico (2021), el conocimiento del contenido didáctico de los profesores en formación muestra las “ limitaciones que presentan en este tema el profesorado en su formación inicial, y que en muchos casos coinciden con las que presenta la población escolar de Educación Primaria” (p. 3). Es de esta manera que la didáctica de las matemáticas introduce una dimensión que se denomina análisis didáctico (Rico, 2013) y que a su vez la conforman cuatro estructuras: La primera denominada el análisis del contenido, cuya esencia se centra en los significados de los contenidos matemáticos en la escuela, el segundo se denomina el análisis cognitivo, cuya intencionalidad se centra en los aprendizajes de dichos contenidos, la tercera se llama análisis de instrucción, cuyo propósito se centra en la elección de tareas, la organización y el uso de recursos necesarios para la enseñanza de los contenidos. Finalmente, el análisis de la evaluación, que se encarga de valorar los aprendizajes logrados por los estudiantes. A continuación, se enfatiza en cada una de las estructuras antes mencionadas.

2.2.3.1. El análisis de los contenidos.

En esta estructura se busca reconocer y dar sentido a los diferentes significados que tiene el concepto de fracción: Parte - todo, operador, razón y medida; estos significados están constituidos por una categoría que los representa, es decir las múltiples formas de representación semiótica de la mismas, como lo son las diferentes notaciones gráficas y simbólicas, así como también sus manifestaciones verbales (Duval, 2012). Este análisis también lo comprende la fenomenología, que consiste en describir los fenómenos en los que está involucrado el concepto y la relación existente entre ellos, “los contextos en los que se utilizan y aquellas situaciones en las que se presentan y en las cuales se aplican” (Rico, 2013, p.18).

Sin este conocimiento de las fracciones que se adquiere al comienzo en el nivel de formación y que se va refinando con la práctica docente, el profesor no desarrolla competencias necesarias para transmitir los conceptos imprescindibles para el aprendizaje de las fracciones. Algunos estudios enfatizan en esta carencia al respecto,

dado que son muchos los profesores que restringen este análisis sólo a tres aspectos; el primero al significado de parte todo, el segundo a una única representación numérica y el tercero a la manera de operar solamente mediante algoritmos (Obando, 2003; Pirie y Kieren, 1994; Solarte Castillo, 2018).

2.2.3.2. El análisis cognitivo.

Un profesor que tenga claro cuáles son los conocimientos que deben alcanzar los estudiantes es vital para que estos avancen en temas de mayor complejidad, aunque existen limitaciones de orden conceptual que pueden producir obstáculos de todo tipo y por lo mismo no ayuden en los aprendizajes, el análisis cognitivo permite reducir esas limitaciones, dado que sirve para organizar, para responder al que, al para qué y hasta dónde deben aprender determinados conceptos, en este caso las fracciones. De acuerdo con Rico (2013), son tres las categorías que sintetizan el análisis cognitivo: En primer lugar, se ubican las expectativas sobre el aprendizaje de los estudiantes, y son las fracciones un tema que despierta sensaciones de todo tipo, en su mayoría son de ansiedad, falta de competencia y poca habilidad para manipularlas al momento de ser operadas.

Es por lo tanto labor del profesor servir de intermediario del conocimiento, propender espacios de conciliación con el concepto, ayudar a que los contenidos no se vuelvan complejos y tediosos, sino en un aspecto que les va ayudar posteriormente, por lo tanto, al momento de enseñar debe ser un motivador y no hacer ver el contenido como algo de difícil comprensión, es quizá un aspecto psicológico que todo maestro debe emplear al momento de enseñar las fracciones.

La segunda categoría es sobre las dificultades del aprendizaje; el profesor en su labor diaria detecta situaciones sobre el aprendizaje y la forma como el mismo enseña, esta labor no debe ser vista como algo secundario, al contrario, permite observar avances y retrocesos, permite cambiar procesos didácticos y buscar estrategias que sirvan para mejorar la aprehensión de los conceptos que enseña.

Un maestro que tenga mínimas nociones sobre lo que es el conocimiento didáctico del contenido, debe formarse de manera permanente, actualizarse, leer sobre los posibles obstáculos que pueden enfrentar los estudiantes al momento de operar con las fracciones, para que de esta manera pueda ampliar las perspectivas de los estudiantes y ayudarlos en el aprendizaje. De acuerdo con Socas (2011), el análisis de las “limitaciones previsibles en el aprendizaje de los escolares, acompañado de propuestas para su tratamiento, es parte de la actividad que se realiza mediante la componente cognitiva del análisis didáctico” (p. 125).

La última de las categorías se denomina la demanda cognitiva, que es cuando se hace uso de las tareas para retar al estudiante a dar variadas respuestas a cada una de las situaciones que se le invita resolver, por ejemplo en el campo de las fracciones la demanda cognitiva no se debe superponer a la algoritmización, es función del profesor hacer que los problemas que plantee, se puedan resolver mediante variadas situaciones en donde se ponga en juego las diferentes formas de representar la fracción y que además use múltiples registros de representación, es mediante la creatividad del profesor que se despiertan habilidades en el estudiante, y una buena forma de que la demanda cognitiva funcione es mediante la utilización de resolución de problemas en los que los estudiantes puedan usar las formas de representar las fracciones: parte – todo, razón, medida y operador.

2.2.3.3. El análisis de instrucción.

Es el momento en el que el profesor hace uso de la ingeniería didáctica para diseñar la nueva propuesta alternativa del aprendizaje, además de identificar y generar las tareas tanto de enseñanza como de aprendizaje. En el trabajo de enseñanza de las fracciones, son numerosos los recursos para transmitir los conceptos a los estudiantes, existen propuestas exitosas y otras que aportan a la conceptualización de las mismas, sin embargo, es el maestro quien elige las que mejor se adapten a su nivel, conocimiento didáctico y de contenido y al grupo que desea intervenir.

De otra parte, el análisis de instrucción es condición necesaria para que el profesor busque alternativas para transmitir los conceptos, en especial las fracciones tienen una gran variedad de representaciones y es en este momento que se deben buscar formas apropiadas para evitar restricciones en las que por lo general caen todos los profesores y es exagerar el uso de algoritmos por encima de otras propuestas (Tapia y Rivas, 2016).

2.2.3.4. El análisis de la evaluación.

El profesor tiene el deber pedagógico de ser un custodio del aprendizaje, es por medio de las actuaciones de los estudiantes, que podrá determinar los avances en el conocimiento que se adquiere en el tiempo mediante sus propuestas tanto conceptuales como didácticas. Es un juez que admite las dificultades y los obstáculos que se evidencian en el proceso desde ambos actores, sus juicios deben ser emitidos con total parcialidad reconociendo los momentos en los que se pudo equivocar y en los que tuvo avances.

A partir de ello debe crear estrategias de mejora, para organizar la gestión de clase, el discurso didáctico del contenido deberá ser reformulado para poder avanzar hacia otro espacio del conocimiento.

2.2.4. La Ingeniería Didáctica en las Matemáticas.

Para definir el concepto, es preciso considerar la relación que guarda la educación matemática con la ingeniería. Esta unión ha permitido generar múltiples formas de enseñar aspectos teóricos de las matemáticas desde la didáctica misma con ayuda de metodologías sustentadas en diferentes teorías como: los registros de representación semiótica, las situaciones didácticas, los campos conceptuales, la etnomatemáticas, el enfoque ontosemiótico, la transposición didáctica, entre algunos, unidos a las técnicas de la ingeniería. Por otro lado, siendo una teoría novel, ha suscitado el interés por parte de profesores e investigadores en el campo de la didáctica de las matemáticas.

Surgió con los teóricos de la didáctica francesa a partir de los hallazgos encontrados en las situaciones didácticas (Brousseau, 1997), los campos conceptuales (Vergnaud, 1990) y la transposición didáctica (Chevallard, 1998).

De acuerdo con Artigue (1995), “Se denomina con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control científico” (p. 34)

La ingeniería didáctica surgió básicamente en el seno de la educación matemática y su accionar cumple una función dual, por un lado, se convierte en instrumento para la enseñanza y por el otro sirve como una metodología de investigación, en el caso particular se desarrollará en primer lugar como método de enseñanza soportado en las situaciones didácticas teniendo en cuenta las 4 fases de la ingeniería didáctica y la microdidáctica, y de otra parte servirá como método de investigación ya que será de gran ayuda al momento de abordar la macroingeniería como herramienta que sirva para la validación del método implementado en esta investigación.

2.2.4.1. Fases de la ingeniería didáctica.

La ingeniería didáctica se caracteriza por ser un método riguroso, además de sustentar su desarrollo en cuatro fases primordiales, su accionar está enmarcado en el campo de la didáctica es por eso que su preocupación es la enseñanza y el método, a continuación, se realizará un análisis de cada una de las fases y se describen los procesos que esta investigación empleó para poner en marcha su desarrollo.

2.2.4.1.1. Fase 1. Análisis preliminar.

Se basa en los objetivos planteados inicialmente y en las necesidades observadas en los estudiantes. Dentro de este proceso de ingeniería sistémica, deben considerarse los siguientes aspectos:

1. Análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
2. Análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
3. Análisis de las concepciones, dificultades y obstáculos.
4. Análisis de los condicionantes donde se va a implementar la acción didáctica (Carmona-Ramírez y Henao-Céspedes, 2021).

Es claro que este tipo de análisis por ser preliminar no se subordina a todos los aspectos, es más no hay ningún tipo de investigación que refuerce la aplicación de los cuatro aspectos, sin embargo, es importante destacar que es el propio ingeniero, en este caso el investigador el que pone en juego los respectivos análisis preliminares antes de iniciar su proyecto de investigación.

Para dar comienzo a este análisis se parte de la necesidad de identificar cuáles son los contenidos impartidos en las aulas con respecto al tema de las fracciones, si bien en Colombia hasta hace aproximadamente unos 15 años eran pocos los profesores con título de licenciatura en matemáticas, si eran muchos los maestros que sin ninguna formación en el campo se encargaban de dirigir la asignatura, esto provocó que en muchas escuelas del país la profundización en temas como las fracciones fueran muy someros y su aprendizaje entrara en una crisis conceptual generando apatía por parte de los estudiantes, así como por los profesores, que se veían impotentes al notar que sus pupilos no aprendían de manera memorística los algoritmos.

En particular como profesor con más de 20 años de experiencia, formador de profesores con el programa PTA e investigador en el campo de la didáctica he podido constatar este tipo de dificultades al momento de abordar la enseñanza de las fracciones, lo que generó un interés particular por desarrollar una técnica con ingeniería didáctica que ayudara

tanto a profesores como a los estudiantes en la comprensión de los temas y aspectos más importantes tanto para la enseñanza como para el aprendizaje.

Se partió entonces de un análisis epistemológico de los contenidos, cuyo objetivo consistió en revisar los textos que los profesores empleaban para enseñar el concepto de fracción, para ello se realizó una especie de visita informal al aula de cada uno de los cuatro profesores involucrados en el estudio y así conocer de primera mano que textos utilizaban para preparar sus clases y que tipo de tareas o talleres empleaban con sus estudiantes, es muy importante reconocer que en nuestro país se han realizado esfuerzos en cuanto a dotar con textos a todas las instituciones públicas con programas como el de “Todos a Aprender” (MEN, 2016), sin embargo la cobertura de estos textos no siempre es equitativa para todas las instituciones educativas, en donde quedan rezagadas las pequeñas poblaciones y las escuelas rurales.

Fue de esta manera que se realizó un inventario de los textos utilizados por los profesores, en donde se evidenció que el más utilizado era el libro donado por el Ministerio de Educación Nacional, titulado “Vamos a Aprender Matemáticas Guía del Docente 4” (MEN, 2017). En la Figura 5, se aprecia la carátula y contraportada del texto



Figura 5.

Portada y contraportada del texto guía Vamos a Aprender matemáticas 4° grado del MEN.

Nota. Carátula de la portada del texto elaborado por el MEN (2017)

Dicho texto presenta características importantes con relación a los temas que se deben enseñar en lo respectivo a las fracciones, realiza un apartado de saberes previos y posterior a ello introduce a los docentes en la aplicación de registros de representación gráfico, así mismo hace claridad en las diferentes formas de representación de las fracciones: parte – todo, medida, operador y porcentaje; aunque hace una introducción a los números decimales, no especifica claramente el uso de la fracción como razón, finalmente tiene un apartado de aplicación mediante la resolución de problemas con fracciones.

Otro texto que utilizan los profesores y del cual existen algunos ejemplares que fueron donados a la institución educativa por el Ministerio Nacional de Educación durante el programa de transformación educativa se titula: “Proyecto primaria SABERES Saber hacer Matemáticas 4”(Joya Vega et al, 2016), como se aprecia en la Figura 6, en cuanto a la forma que se dispone el contenido está conformado por módulos en especial se enfatiza en el pensamiento numérico; sobre la enseñanza de las fracciones, se destacan los siguientes aspectos: contiene un primer apartado titulado fracciones, otro denominado operaciones entre fracciones, de manera separada trabaja los números decimales y operaciones entre decimales. Se evidencia una baja importancia del tema de las fracciones, ya que se concentra en la parte algorítmica y una sección muy corta de resolución de problemas, son pocos los ejemplos de representación semiótica y no se trabaja los porcentajes y las razones.



Figura 6.

Portada y contraportada del texto guía Proyecto primaria SABERES Saber hacer Matemáticas 4.

Nota. Imagen tomada de un libro físico de la biblioteca de la institución educativa Supía.

De otra parte, algunos profesores adquieren textos adicionales para preparar sus clases como, por ejemplo, el libro de editorial Voluntad titulado “Matemática Nova 4” (Villegas Rodríguez, 1997). Este texto es rico en aplicación de algoritmos sobre operaciones de fracciones, así mismo resalta las fracciones en el contexto parte – todo, sin embargo, son pocas las aplicaciones y su uso se restringe a operaciones entre fracciones heterogéneas y homogéneas, aunque tiene un apartado sobre porcentajes, en la figura 7, se aprecia la portada y contraportada del texto señalado con anterioridad.

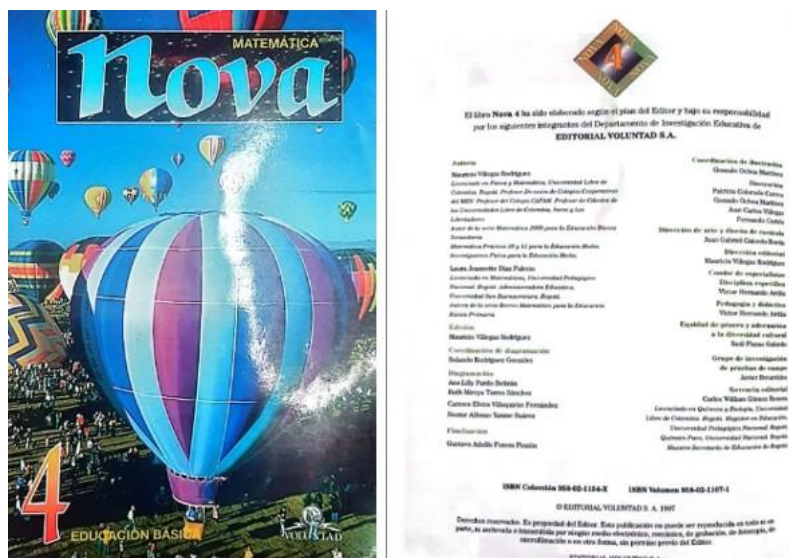


Figura 7.

Portada y contraportada del texto guía Matemática NOVA 4.

Nota. Imagen tomada de un libro físico de un profesor de la I.E. Supía

En suma, los tres textos tienen aspectos importantes, pero su contenido está restringido a operar los algoritmos y a la representación gráfica, así como a la noción generalizada de parte – todo, no poseen riqueza de contenidos en cuanto al uso de lenguaje común, porcentajes, razones y resolución de problemas en contexto.

2.2.4.1.2. Fase 2. Concepción, análisis a priori.

Esta fase consiste en tomar la decisión de actuar en un cierto número de variables del sistema no fijado por las restricciones, que por lo general son llamadas variables de comando. La ingeniería didáctica establece dos tipos de variables o dos niveles, la micro y la macroingeniería. La primera tiene por objeto el estudio de un determinado tema, buscando comprender la complejidad de los fenómenos que pueden ocurrir en el aula, por su parte la macroingeniería comprende la complejidad de la microingeniería junto

con aspectos relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje (Artigue, 1995; .Carmona-Ramírez y Henao-Céspedes, 2021). En un sentido amplio la microingeniería permite establecer un fenómeno y las posibles causas que este presenta de acuerdo con las restricciones, mientras que la macroingeniería se encarga de dotar de herramientas para dar respuestas o soluciones, además de ayudar al diseño e implementación de instrumentos para la ejecución.

Durante esta fase se pudieron determinar aspectos relevantes para el diseño de la propuesta de mejora, en el caso particular por ser tutor del programa PTA, desde el análisis microdidáctico se pudo evidenciar aspectos sobre el aprendizaje y sobre la enseñanza que evidencian obstáculos epistemológicos y conceptuales tanto en los estudiantes como en los profesores, estos obstáculos se supeditan a la enseñanza tradicional, es por ello que se propone un método alternativo con ingeniería didáctica, donde finalmente se compararán las dos metodologías y su eficacia mediante la aplicación de un Modelo Lineal Generalizado Mixto (MMLG)

En la concepción de la propuesta o análisis a priori se tuvo en cuenta aspectos relevantes que sirvieran para la validación del modelo empleado en esta investigación, no se enfatiza en este apartado sobre que es un MMLG, pero si se resaltan aspectos necesarios para el desarrollo de la fase 2, como son las variables de efecto fijo y las variables de tipo aleatoria que juegan un papel importante en el nivel de la macroingeniería y que serán analizadas en la fase 4, por otro lado debido al tiempo de ejecución de las sesiones de trabajo, se enfatiza particularmente en un diseño de microingeniería didáctica mediada por la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau.

2.2.4.1.3. Teoría de las situaciones didácticas.

Una situación didáctica es la interacción entre un medio determinado y un sujeto, los sujetos pueden mantenerse en una situación privilegiada en el medio dependiendo del

uso de un conocimiento previo. En sus comienzos la conceptualización de la situación didáctica se subordinaba a los aspectos que se usaban para enseñar, sin la mediación del profesor como actor (Brousseau, 2002).

En el aspecto constructivista, puramente piagetiano, la teoría de las situaciones didácticas se caracteriza porque:

El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por medio de nuevas respuestas, que son la marca del aprendizaje. (Brousseau, 2002, p. 30).

Para Brousseau (2002), la teoría de las situaciones didácticas se preocupa por comprender las interacciones sociales y culturales que se producen entre los actores del triángulo didáctico: alumnos, docentes y saberes matemáticos.

La situación didáctica en su desarrollo tiene la intención implícita de que el estudiante aprenda algo, que adquiriera un determinado saber, en contravía la situación a-didáctica hace referencia a que el individuo trabajó por su cuenta con el problema, que discuta con sus compañeros acerca del mismo, con base a los conocimientos previos, motivado por el dilema y no por el profesor, sin que éste intervenga en la solución.

Brousseau en su obra clasifica su teoría en cuatro tipos de situaciones así: situaciones de acción, situaciones de formulación, situaciones de evaluación y finalmente la institucionalización.

- Las situaciones de acción: En esta etapa el sujeto se encarga de formular, construir estrategias, tomar decisiones, tantear, actuar sobre el medio y procura explicar el momento enfrentándose al reto, a la prueba.
- Las situaciones de Formulación: En esta situación el sujeto dialoga con los demás compañeros, hace representaciones de modelos, descripciones, se producen acuerdos y contradicciones. Los mensajes entre el emisor y el receptor pueden ser revisado una y otra vez; para que finalmente, los modelos puedan ser

mostrados con la ayuda de signos y reglas.

- Las situaciones de Validación: Es el momento en que las declaraciones o juicios hechos por los sujetos tienen que ser sometidas a juicio por el interlocutor, acá debe probarse que lo que se dice es verdadero. Se genera un diálogo entre los participantes, donde se rechaza lo que es falso y se prueban las afirmaciones.
- Las situaciones de institucionalización: Finalmente, cuando los estudiantes han pasado por todas las anteriores situaciones, el profesor tiene la obligación de sintetizar las conclusiones a las que han llegado en sus discusiones para despersonalizarlas, descontextualizarlas y tomarlas como un saber general, que pueda ser utilizado como conocimiento previo en otra situación o relacionarlo con otro saber en el futuro.

2.2.4.1.4. Nivel de microingeniería de la propuesta didáctica con ingeniería didáctica.

De manera particular se invitaron a los 4 profesores que hace parte de la investigación a que participaran en la capacitación para la implementación de la propuesta de aula con ingeniería didáctica, sólo tres de ellos recibieron con agrado la invitación, una profesora no estuvo de acuerdo y decidió trabajar con la metodología tradicional para la enseñanza de las fracciones que ella empleaba y afirmaba le daba muy buenos resultados la cual consistía en utilizar el tablero y hacer su clase magistral, esta situación provocó una mayor motivación para realizar el trabajo de investigación y se planteó entonces realizar un estudio comparativo entre los dos métodos y la prueba estadística que mejor se adaptaba al estudio fue el MMLG, por dos motivos, el primero es que no es necesario que las distribuciones sean normales por si se violaba este supuesto y el segundo es que las muestras no necesariamente necesitan de balanceo de grupos (Segura, 2019) debido a que en este caso se conformaron tres grupos experimentales (GE_1, GE_2 y GE_3) por un solo grupo control (GC).

Para el diseño de las guías de intervención se plantearon cuatro momentos de intervención didáctico así:

1. La fracción como parte-todo: Equivalencia entre fracciones.
2. La fracción como operador: Cambios de registros de representación semiótico de gráfico a numérico y de numérico a gráfico.
3. Operaciones entre fracciones: Problemas de porcentajes y razones (operaciones con decimales).
4. La fracción como medida: Relaciones de orden entre fracciones.

Cada una de las temáticas se plantearon con las 4 fases de la ingeniería didáctica.

2.2.4.1.5. Fase 3. Experimentación.

En esta fase se hace una aproximación de los resultados prácticos con los fundamentos teóricos, es decir se contrastan los resultados obtenidos en la implementación de la nueva técnica con la teoría, la cual permitirá comparar el método de la ingeniería didáctica con el método tradicional en la fase 4. Es importante aclarar que no se revisan los procesos de los profesores si no el avance de los estudiantes, en este momento aún los resultados no se tienen en cuenta, es un momento de observación de los comportamientos tanto del profesor como de los 4 grupos.

2.2.4.1.6. Fase 4. El análisis a posteriori.

Es considerado el centro de la investigación de la ingeniería didáctica donde se muestran los resultados y habilidades adquiridas por los estudiantes en el desarrollo de su aprendizaje, en este caso se trata de considerar tal análisis en un sentido sistémico, de perspectiva particular, sincrónica y constitutiva. Es decir, bajo la consideración de que un criterio didáctico fundamental es el establecimiento y articulación de los diferentes factores que necesariamente intervienen en el diseño didáctico y en la ejecución de las tareas (Carmona-Ramírez y Henao-Céspedes, 2021).

2.2.4.1.7. Nivel de macroingeniería de la propuesta didáctica con ingeniería didáctica.

En el análisis a posteriori se realiza el proceso de la macroingeniería, necesario en la implementación del MMLG, ya que permite observar el comportamiento de la o las variables predictoras o dependientes y su interacción con las variables independientes o de efectos fijos y las variables aleatorias, y así de esta manera poder determinar cuál es el método que mejor evalúa la enseñanza de las fracciones con estudiantes de 4° grado, y poder concluir si las variables que intervienen son estadísticamente significativas.

En conclusión, el marco teórico no solo organiza referentes conceptuales y metodológicos sobre la enseñanza de las fracciones, sino que orienta de manera directa el diseño de la propuesta didáctica. Al situar la Ingeniería Didáctica como eje central y reconocer las tensiones no resueltas en la literatura, esta investigación se posiciona con un enfoque novedoso que busca aportar lineamientos replicables y validados empíricamente en la enseñanza de las matemáticas en primaria.

2.3. Marco Conceptual.

El marco conceptual que aquí se presenta tiene la finalidad de justificar y fundamentar teóricamente las categorías de análisis que derivan de la pregunta central de la investigación: ¿Cómo puede diseñarse una propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica para favorecer el aprendizaje de las fracciones en estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Supía, Colombia? Dada la integralidad de la pregunta y de los objetivos, se proponen las siguientes categorías conceptuales: Enseñanza de las fracciones, dificultades del aprendizaje de las fracciones, Ingeniería Didáctica, práctica pedagógica, evaluación del aprendizaje y efectividad pedagógica.

Al inicio de este capítulo se plantea una breve introducción que orienta al lector sobre la función del apartado dentro de la tesis, enfatizando que las categorías no se abordan de

manera aislada, sino como un conjunto articulado que sustenta el diseño y el análisis de la propuesta de intervención. Estas no solo otorgan orden al andamiaje teórico del estudio, sino que permiten configurar un panorama regular y metódico del hecho educativo en cuestión, mediante la contextualización de conceptos claves en la instancia de diseño, puesta en marcha y evaluación de un experimento de naturaleza pedagógica.

De manera complementaria, se subraya que estas categorías no se conciben de forma estática, sino en diálogo constante con la pregunta de investigación, de modo que su articulación orienta la construcción de hipótesis, la elección metodológica y la interpretación de los resultados.

Asimismo, se resalta que el marco conceptual cumple un doble propósito: por un lado, definir los términos esenciales que orientan el estudio; y por otro, organizar la base teórica y metodológica que da coherencia al enfoque propositivo de la investigación. De esta manera, se refuerza la conexión entre teoría y práctica, destacando que cada categoría seleccionada contribuye a comprender y evaluar la transformación pedagógica que se busca alcanzar. De este modo, el marco conceptual consiste en una herramienta analítica que da contexto a la intervención, orienta la investigación y posibilita establecer los alcances pedagógicos del método.

2.3.1. La enseñanza de las fracciones.

La enseñanza de las fracciones en la educación básica primaria constituye un eje fundamental dentro del currículo de las matemáticas, ya que introduce al estudiante en el campo de los racionales y en nociones clave como son: parte-todo, cociente, razón y proporción. De acuerdo con Solarte (2018), el término fracción es polimórfico, lo que implica que una misma palabra tenga varios significados y formas de representación: simbólico, gráfico, decimal y porcentual. Tal diversidad conceptual obliga a un enfoque pedagógico que contemple dicha situación desde una visión estructurada y contextualizada.

Para la enseñanza, ello implica que las fracciones no pueden enseñarse memorizando procedimientos, sino construyendo significados sobre la base de un amplio campo de las representaciones y la confrontación de estas con la resolución de problemas reales. Este esquema de trabajo se enmarca en este ámbito, ya que pretende intervenir en el proceso de enseñanza a partir de una propuesta basada en la Ingeniería Didáctica.

Este apartado resulta clave, pues permite evidenciar cómo la presente investigación busca superar la visión mecanicista de la enseñanza de las fracciones, aportando un enfoque original que prioriza la comprensión conceptual en lugar de la simple aplicación algorítmica.

2.3.2. Dificultades en el aprendizaje de las fracciones.

Son variadas las investigaciones que documentan sobre cómo las fracciones son uno de los temas que presenta mayor problemática conceptual a los estudiantes de primaria al momento de su aprendizaje (Parra-Cortés y Carmona-Ramírez, 2021; González y Block Sevilla, 2005; Kieren, 1988). Esto se debe por una parte a la complejidad conceptual y, por otra a la falta de sentido del concepto de número, lo que conduce a un uso inapropiado de las representaciones (Gráfica, numérica, pictórica).

Estas dificultades se ven reflejadas en los bajos logros en las pruebas SABER y PISA y en una limitada capacidad de los estudiantes para interpretar, comparar o hacer operaciones con fracciones en contextos reales. Este problema puede considerarse como estructural al sistema de enseñanza de las matemáticas. Por tanto, el objetivo de este estudio fue el proponer una intervención pedagógica que abordara el problema desde su raíz conceptual y didáctica, a través de una modelo diseñada para superar los obstáculos epistemológicos y cognitivos.

En este sentido, el estudio se sitúa en la brecha identificada por investigaciones recientes, que, si bien describen las dificultades, no siempre logran transformarlas en propuestas replicables con evidencia empírica en contextos reales de primaria.

2.3.3. La Ingeniería Didáctica.

La Ingeniería Didáctica, fue desarrollada por Artigue (1995), además de ser una técnica de investigación sobre la didáctica de las matemáticas, es una metodología que articula teoría y práctica mediante un ciclo por fases, así: la primera se denomina análisis preliminar, la segunda diseño a priori, la tercera experimentación y finalmente el análisis a posteriori. Por lo tanto, el propósito de la Ingeniería Didáctica es diseñar e implementar secuencias didácticas teóricamente fundamentadas, empíricamente validadas y contextualmente ajustadas.

En esta investigación la Ingeniería Didáctica se concibe y aplica como marco metodológico y conceptual para el diseño de una propuesta de enseñanza de las fracciones adaptada a las características de los estudiantes de cuarto grado. La finalidad de esta propuesta es transformar la praxis docente a través de una intervención planificada, progresiva y validada que permita aprendizajes significativos y sostenidos en el tiempo.

La pertinencia de este enfoque radica en que, a diferencia de otras metodologías tradicionales, la Ingeniería Didáctica integra simultáneamente la construcción teórica con la validación experimental, lo que fortalece la novedad de esta propuesta doctoral frente a antecedentes previos.

2.3.4. La práctica pedagógica.

La práctica pedagógica es el conjunto de acciones intencionadas realizadas por el docente en el aula, con el objetivo de mediar la construcción del conocimiento. Esta está determinada por el enfoque pedagógico del docente, el contexto institucional, los saberes previos del docente y los recursos didácticos ofrecidos. En el caso concreto, esta se puede considerar también un espacio de transformación en el sentido de apostar por la mejora de los procesos de enseñanza de fracciones que se basen en una propuesta fundamentada y estructurada. En ese sentido, la propuesta con la ID tiene entre sus

objetivos enseñar para aprender. Esto es, en muchos casos el objetivo final, que consiste en mejorar el aprendizaje del estudiante, sin embargo, en este caso también se trata de la forma en la cual los docentes están planeando, ejecutando y evaluando sus clases de matemáticas, un aspecto que ayudaría también a generar una cultura pedagógica investigativa y de innovación.

Así, esta categoría se enlaza directamente con la pregunta investigativa, en tanto busca comprender cómo la intervención no solo mejora los aprendizajes de los estudiantes, sino que también transforma la forma en que los docentes conciben y ejecutan su práctica en el aula.

2.3.5. Evaluación del aprendizaje.

La evaluación del aprendizaje se define como un proceso sistemático de recolección y análisis de información con el fin de determinar el aprendizaje de los estudiantes en relación con los objetivos de aprendizaje. En ese sentido, la evaluación formativa proporciona realimentación y guía el proceso de enseñanza y aprendizaje para que sea más efectivo (Tobón, 2017). Por otro lado, opera específicamente para ajustar la enseñanza o el programa al aprendizaje, y las medidas de medición en las que trabaja deben ser instrumentales; es decir, de lo contrario, carecen de significado.

En este trabajo investigativo, la evaluación se puso en práctica utilizando pretest y posttest en grupos experimentales y de control para medir el cambio conceptual como resultado de la intervención. Se utilizaron también técnicas estadísticas robustas para garantizar la validez y la fiabilidad, ya que los datos son de naturaleza jerárquica.

La evaluación, en este caso, no se limita a medir resultados, sino que constituye una categoría analítica que sustenta la validez del estudio y aporta criterios transferibles a futuras investigaciones en educación matemática.

2.3.6. Efectividad pedagógica.

La efectividad pedagógica es el impacto real de una práctica educativa en los resultados de aprendizaje. Hattie (2009), describió la efectividad como la evidencia empírica de un cambio en el rendimiento de los estudiantes después de experimentar con intervenciones específicas o estrategias. Ninguna práctica puede considerarse efectiva solo porque se aplicó; en cambio, su efectividad generalmente se establece mediante la presentación de pruebas convincentes en forma de indicadores claros, comparaciones imparciales y análisis sistemáticos. En este caso, se puede considerar que una intervención es pedagógicamente efectiva si logra que sus estudiantes aumenten su desempeño en el tema de fracciones más allá de los estudiantes que usan la enseñanza normal. La efectividad se respalda en este caso con pruebas empíricas en comparaciones grupales.

Este concepto adquiere especial relevancia en la investigación, pues permite conectar la mejora en el rendimiento de los estudiantes con la validez externa de la propuesta, mostrando cómo los hallazgos pueden extrapolarse a contextos escolares con características similares.

2.4. Marco Contextual.

El presente marco contextual tiene como propósito situar la investigación dentro del panorama educativo actual, estableciendo la relación entre los antecedentes revisados y los objetivos de este estudio. En este sentido, busca ofrecer al lector una visión clara de cómo las experiencias internacionales, latinoamericanas y nacionales en torno a la enseñanza de las fracciones y la aplicación de la Ingeniería Didáctica permiten identificar vacíos, justificar la pertinencia de la propuesta y respaldar su carácter transformador. De manera explícita, este apartado enfatiza que el marco contextual no solo organiza antecedentes, sino que también orienta el enfoque propositivo de la investigación, conectando la teoría con la necesidad de transformar la práctica pedagógica en la educación básica primaria.

Además, este apartado integra no solo referentes académicos, sino también experiencias educativas recientes que han explorado la innovación pedagógica con TIC y propuestas curriculares orientadas a la mejora del aprendizaje matemático, lo que permite situar la investigación en diálogo con prácticas y políticas actuales.

El presente marco contextual se construye a partir de un estudio documental riguroso que recoge y analiza las experiencias más recientes relacionadas con la enseñanza de las fracciones en el nivel de educación básica primaria, con énfasis en aquellas investigaciones que han utilizado la Ingeniería Didáctica como metodología para el diseño e implementación de propuestas pedagógicas.

Para facilitar la comprensión y la legibilidad, el análisis se organiza en tres niveles de estudio: internacional, latinoamericano y nacional. Este análisis se organiza en función de los aportes internacionales, latinoamericanos y nacionales, y permite identificar patrones comunes, avances y vacíos en torno al objeto de estudio: la efectividad de un método de enseñanza de las fracciones fundamentado en Ingeniería Didáctica.

Los referentes seleccionados evidencian un creciente interés por transformar la práctica pedagógica mediante intervenciones didácticas fundamentadas teóricamente, dirigidas a superar las dificultades persistentes en la comprensión de las fracciones. Al mismo tiempo, muestran la necesidad de generar evidencia empírica en contextos escolares reales, especialmente en el grado cuarto de educación primaria, donde dichas dificultades se hacen más visibles. En este marco, se ha evitado repetir desarrollos ya tratados en otros apartados, como el carácter polimórfico de las fracciones, para garantizar claridad y evitar redundancias.

A partir de esta revisión, se establece un panorama actualizado sobre las estrategias implementadas, los marcos teóricos utilizados, las metodologías de investigación empleadas y los resultados obtenidos. Esta contextualización permite delimitar el lugar que ocupa la presente investigación dentro del campo educativo, justificar su pertinencia y proponer una contribución concreta al estudio de la enseñanza de las fracciones desde una perspectiva pedagógica.

En el ámbito internacional, diversos estudios han mostrado la efectividad de aplicar la Ingeniería Didáctica para abordar la enseñanza de las fracciones desde una perspectiva estructurada. Por ejemplo, González y Block (2005), desarrollaron una microingeniería didáctica con estudiantes de quinto grado, mostrando avances significativos en la comprensión de la división de fracciones unitarias.

Díaz (2006), evaluó el impacto de esta metodología en estudiantes venezolanos de séptimo grado, concluyendo que el grupo experimental obtuvo mejores resultados académicos que el grupo control. Ríos (2007, 2009a, 2009b) implementó propuestas con estudiantes universitarios, observando mejoras en competencias conceptuales y procedimentales. Wilhelmi (2009) destacó el valor de unidades didácticas diseñadas desde esta metodología en el nivel primario.

En la última década, investigaciones como las de Reinhold et al. (2020) y Block et al. (2024) han demostrado la efectividad de integrar Ingeniería Didáctica con recursos digitales y metodologías colaborativas, aportando evidencia empírica sobre su impacto en la comprensión de fracciones en primaria y secundaria. Estos estudios refuerzan la vigencia del enfoque y subrayan la necesidad de replicar experiencias en diferentes contextos educativos.

Desde la perspectiva latinoamericana, Alva y Solis (2019), implementaron secuencias basadas en situaciones didácticas e Ingeniería Didáctica para fortalecer los distintos significados de las fracciones. Esparza-Rodríguez, 2002, 2021), mostraron que el trabajo con problemas multiplicativos con fracciones mejoró la comprensión didáctica de docentes de sexto grado.

Más recientemente, Arteaga-Martínez et al. (2022) documentaron una experiencia intercultural en Chile y España, utilizando ID en contextos no decimales, mientras que investigaciones en México (Block, 2021) mostraron que el trabajo lúdico con juegos matemáticos fomenta la construcción de significados sólidos sobre las fracciones. Estos aportes evidencian que en Latinoamérica la aplicación de ID se ha diversificado y actualizado, aunque aún es escasa en primaria.

En el contexto colombiano, el trabajo de Obando (2003), constituye una referencia clave, al proponer una secuencia didáctica sobre números racionales desde la relación parte-todo. Otros aportes incluyen a Páez (2022), quien diseñó una cartilla para mejorar la interpretación de fracciones en estudiantes de cuarto grado; Molina (2019), quien elaboró una unidad didáctica mediada por la resolución de problemas; y Cano (2014), quien aplicó una propuesta desde la metodología Escuela Nueva y el aprendizaje significativo.

En los últimos años, autores como Páez (2022) y Molina (2019) han aportado recursos prácticos para mejorar la comprensión de fracciones, sin embargo, se observa que la mayoría de estas propuestas carecen de un análisis estadístico robusto que valide empíricamente los resultados, lo cual refuerza la pertinencia de esta investigación al articular ID con modelos de análisis cuantitativos avanzados.

Este conjunto de antecedentes evidencia el creciente interés por mejorar la enseñanza de las fracciones mediante estrategias estructuradas, sin embargo, también deja ver la necesidad de investigaciones empíricas en el nivel de educación básica primaria que articulen la Ingeniería Didáctica con enfoques pedagógicos pertinentes. En este sentido, la presente investigación busca aportar al campo educativo desde una propuesta contextualizada y evaluada empíricamente, contribuyendo así a cerrar la brecha existente entre teoría didáctica y práctica escolar real.

2.5. Marco Legal y Normativo.

El presente marco legal y normativo tiene como propósito establecer el soporte jurídico que respalda el diseño, implementación y evaluación de la propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica. Su función dentro de la investigación es garantizar que las decisiones pedagógicas adoptadas se encuentren alineadas con las disposiciones constitucionales, legales y curriculares vigentes, ofreciendo un marco de legitimidad y pertinencia. Para facilitar la comprensión, este apartado se organiza en tres niveles: constitucional, legal y curricular.

Para garantizar mayor claridad, este marco se presenta de manera sistemática: en primer lugar, se abordan los fundamentos constitucionales; en segundo lugar, las disposiciones legales generales; en tercer lugar, los decretos y lineamientos curriculares expedidos por el Ministerio de Educación Nacional; y finalmente, los estándares básicos de competencias y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) que orientan de manera directa el trabajo pedagógico en matemáticas.

El marco normativo de esta investigación se basa en los principios fundamentales de la Constitución Política de Colombia (1991), los lineamientos que emanan de la Ley General de Educación (1994) y cada uno de los decretos reglamentarios establecidos por el Ministerio de Educación nacional de Colombia con respecto a los procesos de la educación matemática para la educación básica primaria del país. Es de manera que es una función del estado en Colombia, en el sector educativo según la Constitución nacional y las Leyes garantizar la libertad de enseñanza, aprendizaje, investigación y cátedra (Constitución Política de Colombia, 1991, Artículo 27).

De la misma manera, la educación es un derecho de las personas y un servicio público que tiene una función social; con ella se busca el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura, por otra parte el estado, la sociedad y la familia son responsables de la educación, que además es obligatoria entre los cinco y los quince años de edad y que comprenderá como mínimo, un año de preescolar y nueve de educación básica (Constitución Política de Colombia, 1991, Artículo 67).

Así mismo, el Estado tiene el deber de promover y fomentar el acceso a la cultura de todos los colombianos en igualdad de oportunidades, por medio de la educación permanente y la enseñanza científica, técnica, artística y profesional en todas las etapas del proceso de creación de la identidad nacional. (Constitución Política de Colombia, 1991, Artículo 70).

Por otro lado, en la Ley General de Educación (1994, Artículo 5) se definen los fines de la educación, específicamente en esta investigación se tienen en cuenta los incisos 5, 7 y 11, que se expresan de forma tácita: La adquisición y generación de los conocimientos

científicos y técnicos más avanzados, humanísticos, históricos, sociales, geográficos, y estéticos, mediante la apropiación de hábitos intelectuales, adecuados para el desarrollo del saber (Ley General de Educación 1994, Artículo 5). Estos fundamentos legales no solo orientan los propósitos generales de la educación en Colombia, sino que también sustentan la pertinencia de diseñar propuestas pedagógicas específicas, como la enseñanza de las fracciones mediante la Ingeniería Didáctica, que respondan a los objetivos de formación integral establecidos por la ley.

El acceso al conocimiento, la ciencia, la técnica y demás bienes y valores de la cultura, el fomento de la investigación y el estímulo a la creación artística en sus diferentes manifestaciones (Ley General de Educación 1994, Artículo 5).

La formación de la práctica del trabajo, mediante los conocimientos técnicos y habilidades, así como en la valoración del mismo como fundamento del desarrollo individual y social (Ley General de Educación 1994, Artículo 5).

Así mismo, en la sección tercera de la Ley 115 sobre la educación básica (Ley General de Educación, 1994), se determinan los objetivos generales de la educación básica en su ciclo de primaria y de secundaria; además de los objetivos específicos, las áreas fundamentales y obligatorias para el logro de los mismos, particularmente el artículo 23 de la presente ley, sobre la áreas obligatorias y fundamentales, expresa: Entre los grupos de áreas obligatorias y fundamentales que comprenderán un mínimo del 80% del plan de estudios, están Matemáticas (Ley General de Educación, 1994).

Continuando con los referentes nacionales para la educación matemática, se nombran a continuación los lineamientos curriculares del área de matemáticas. Es así como el Ministerio de Educación Nacional en la Resolución 2343 (1996), adoptó el diseño de los procesos curriculares, de lineamientos generales y de calidad de la educación en consonancia con lo expresado en el artículo 78 de la Ley General de Educación (1994).

Los lineamientos curriculares (Ministerio de Educación Nacional, 1998) para el área de las matemáticas, estipulan los propósitos de formación, por nivel y ciclo de los estudiantes, los criterios para selección de contenidos y sus secuencias por grados,

además de la organización espacio temporal de los contenidos que pueden ser por asignaturas, por módulos, por proyectos pedagógicos, por campos conceptuales, entre otros. Así mismo determina los criterios para la selección de metodologías y recursos didácticos. Es una propuesta que debe estar en un proceso de revisión y cualificación permanente y que debe ser analizada, discutida y proyectada buscando siempre mejorar la calidad de las matemáticas en la educación.

En el marco de esta investigación, los lineamientos curriculares adquieren un valor especial, ya que proveen las orientaciones necesarias para seleccionar y secuenciar contenidos matemáticos en cuarto grado, permitiendo que la propuesta didáctica de fracciones se articule con los criterios oficiales de calidad.

Otro de los documentos que se utilizó en esta investigación son los estándares básicos de competencias en matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2006), los cuales afirman que las competencias no se logran de forma espontánea, éstas, requieren de unos ambientes para el aprendizaje que estén enriquecidos por situaciones problema, que sean significativos y comprensivos, que faciliten alcanzar cada vez competencias de niveles de mayor complejidad. La didáctica requiere de unos recursos o materiales que estén estructurados para objetivos educativos (juegos, fichas, cartas, regletas, modelos en plástico, madera o cartón, entre otros); o que vengan de otros contextos y disciplinas que pueden ser acondicionados para los objetivos que la tarea necesite.

La pertinencia de los estándares en esta investigación radica en que permiten evaluar la efectividad pedagógica de la propuesta en relación con criterios públicos y verificables, asegurando que los logros de los estudiantes en fracciones no se midan de manera aislada, sino en coherencia con las expectativas nacionales de calidad educativa.

Los lineamientos curriculares y los estándares de aprendizaje en el currículo de las matemáticas, están alineados en toda la educación básica y media; y están compuestos por 5 pensamientos y sistemas así: pensamiento numérico y sistemas numéricos; pensamiento métrico y sistemas de medidas; pensamiento espacial y sistemas geométricos; pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos; pensamiento aleatorio y sistemas de datos; además de los procesos matemáticos.

La aplicación de los estándares está dada en cada uno de los elementos que se enunciaron anteriormente. Los estándares básicos de competencias en matemáticas son criterios claros y públicos que permiten dar un juicio bien sean de un estudiante, una institución educativa o el conjunto del sistema educativo, dando cumplimiento a unas expectativas de calidad comunes, además de proyectar la situación que se desea o se espera que aprendan todos los estudiantes en su paso por la Educación Básica y Media en cada una de las áreas del conocimiento, distinguiendo el nivel de calidad por grupos de grados que se pretende alcanzar.

Por otra parte, sirven de apoyo a los profesores en el desarrollo de situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo, organización de ambientes, que inciten a los estudiantes a alcanzar los niveles de competencia respectivos para el grupo de grados especificados y a avanzar lo más lejos posible de lo esperado en ese conjunto de grados en los estándares. En cuanto a los estándares que corresponde a esta investigación, se nombran en especial algunos que están contenidos dentro del pensamiento y los sistemas numéricos:

- Análisis representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales.
- Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p. 33).

Finalmente, en el año 2015, el Ministerio de Educación Nacional, dispone para la educación básica y media los Derechos básicos de aprendizaje (DBA). Los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) (Ministerio de Educación Nacional, 2015), fueron creados en correspondencia con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias y están dirigidos a la comunidad educativa con el propósito de promover en igualdad de condiciones a los niños, niñas y jóvenes del país en procesos de enseñanza, indican lo que los estudiantes deben aprender en cada grado escolar desde 1º grado hasta 11º grado, inicialmente para las áreas de lenguaje y matemáticas. Son un

conjunto de saberes fundamentales para los estudiantes planteando una posible ruta de aprendizaje.

En los DBA del área de matemáticas del grado cuarto, con relación a las fracciones, aparece lo siguiente:

1. Interpreta las fracciones como razón, relación parte todo, cociente y operador en diferentes contextos.
2. Describe y justifica diferentes estrategias para representar, operar y hacer estimaciones con números naturales y números racionales (fraccionarios), expresados como fracción o como decimal.
3. Establece relaciones mayores que, menor que, igual que y relaciones multiplicativas entre números racionales en sus formas de fracción o decimal.
(Ministerio de Educación Nacional, 2015, p.16).

Estos DBA constituyen el marco de referencia más específico y aplicable al objeto de estudio, ya que establecen con precisión lo que los estudiantes deben aprender en fracciones en el grado cuarto. En este sentido, la propuesta didáctica fundamentada en Ingeniería Didáctica se diseña en coherencia con dichos derechos, asegurando su pertinencia y aplicabilidad en el contexto escolar.

A manera de conclusión de este capítulo se puede considerar que las categorías efecto de estudio fueron definidas de manera clara para poder determinar aspectos de relevancia de las variables, aportando bases sólidas y claras para la construcción de los instrumentos y el desarrollo del tratamiento, en este caso el diseño de una propuesta didáctica con ingeniería didáctica, por otro lado se muestran aportes relevantes en cuanto a la enseñanza del tópico de las fracciones, resaltándose las formas de representación, los obstáculos, el contenido didáctico del profesor y las fases de una ingeniería didáctica para la construcción de la propuesta que se basa en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, así como toda la normativa nacional para el logro de la misma.

Como cierre, este marco legal y normativo enfatiza que la propuesta investigativa se encuentra sustentada en disposiciones constitucionales, legales y curriculares organizadas de manera sistemática.

Capítulo 3. Fundamentos metodológicos y resultados de investigación.

El presente capítulo reúne los fundamentos metodológicos y los resultados de la investigación, estableciendo el camino seguido para dar respuesta a la pregunta planteada. En primer lugar, se presenta la operacionalización de las variables, lo que permite traducir los conceptos teóricos en dimensiones e indicadores concretos que orientan tanto el diseño de la propuesta como su evaluación. Posteriormente, se describe el diseño metodológico, donde se explican el enfoque, tipo de estudio y procedimientos aplicados, garantizando coherencia entre los objetivos de la investigación y las decisiones tomadas.

Por otro lado, se describen el método, técnicas e instrumentos utilizados para la recolección de información para asegurar la validez y confiabilidad de los datos. Además, se señala cómo se desarrollaron las pruebas pretest y posttest y la guía de intervención en base a la Ingeniería Didáctica. Asimismo, se aborda el proceso de selección de la muestra y la forma como se llevó a cabo la etapa de trabajo de campo, detallando paso a paso la puesta en marcha de la propuesta con los grupos (GE y GC) de estudiantes. Este apartado concluye con la presentación y el análisis de los resultados que, a partir de los hallazgos más relevantes, se evalúan los impactos reales de la intervención realizada. Todo ello articula un recorrido lineal a lo largo de los pasos llevados a cabo, aportando un sustento metodológico y empírico clave para evaluar la efectividad del método de enseñanza, fluido y razonado, de las fracciones sustentado en la Ingeniería Didáctica.

3.1. Cuadro de Operacionalización de variables.

La operacionalización de variables constituye un proceso fundamental en las investigaciones de carácter cuantitativo, ya que permite traducir los objetivos y preguntas en elementos observables y medibles que orientan tanto el diseño de la propuesta como la evaluación de sus resultados. En este caso, el cuadro responde al

propósito de diseñar una propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las fracciones en estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Supía, Colombia, con el fin de favorecer aprendizajes significativos y generar estrategias de mejora pedagógica.

La elección de la Ingeniería Didáctica (ID) como eje central se justifica porque organiza el trabajo pedagógico en fases de análisis, diseño, implementación y validación, lo que permite articular de manera rigurosa la propuesta didáctica con los procesos de enseñanza y aprendizaje. Así, la variable independiente se define como el método de enseñanza basado en la ID, mientras que la variable dependiente corresponde al desempeño en el aprendizaje de las fracciones, medido a partir de competencias específicas como: Equivalencia (CR_1), Cambio de registro gráfico a numérico (CR_2), Cambio de registro numérico a gráfico (CR_3), Relaciones de orden (CR_4), Porcentajes (CR_5) y Razones (CR_6)

Cada dimensión e indicador de la tabla de operacionalización se fundamenta en aportes de la didáctica de las matemáticas, así como en la necesidad de que los estudiantes desarrollen una comprensión integral del concepto de fracción. De este modo, el cuadro no solo cumple una función técnica, sino que establece una coherencia metodológica y científica entre el objetivo de la investigación, las hipótesis formuladas y los criterios de evaluación, garantizando la validez del proceso investigativo.

Tabla 3.

Operacionalización de las variables.

Operacionalización de Variables						
Tema: Diseño de una propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las fracciones en estudiantes de cuarto grado de primaria orientada a favorecer aprendizajes significativos y generar estrategias de mejora pedagógica.						
Pregunta de investigación	Objetivo general	Objetivos específicos	Hipótesis	Variables estudiadas	Dimensiones	Indicadores
¿Cómo puede diseñarse una propuesta didáctica	Diseñar una propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería	●Fundamentar teóricamente una propuesta didáctica basada en la Ingeniería	Hipótesis nula (H_0): No existen diferencias estadísticas	Variable independiente: Método de enseñanza.	Diseño didáctico Implementación	Aplicación estructurada por fases Uso de representaciones múltiples

fundamenta da en la Ingeniería Didáctica para favorecer el	Didáctica para la enseñanza de las fracciones, orientada a	Didáctica para la enseñanza de las fracciones en estudiantes de cuarto grado	significativas en el aprendizaje de las fracciones entre los	Definición conceptual: Conjunto de estrategias, principios teóricos y fases (análisis preliminar, diseño a priori, experimentaci ón y análisis a posteriori) que integran teoría y práctica en la enseñanza de las matemáticas (Artigue, 1995).	Mediación pedagógica	Actividades contextualizad as
de las fracciones en estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Supía, Colombia durante el año 2024?	aprendizajes significativo s y generar estrategias de mejora pedagógica en los estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Supía, Colombia, durante el año 2024.	Institución Educativa Supía. ●Analizar la implementaci ón de la propuesta didáctica en grupos experimentale s, contrastándola con un grupo control que seguirá el método tradicional, para favorecer el aprendizaje de las fracciones. ●Elaborar la propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las fracciones en estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa Supía. ●Evaluar el impacto de la propuesta didáctica en el desempeño académico de los estudiantes mediante la comparación de resultados entre los grupos experimentale s y el grupo control.	de cuarto grado de la Institución Educativa Supía (Caldas, Colombia) durante el segundo semestre de 2024, que fueron enseñados con la propuesta didáctica fundamentad a en la Ingeniería Didáctica y aquellos que continuaron con el método tradicional. Hipótesis alterna (H₁): Existen diferencias estadísticame nte significativas en el aprendizaje de las fracciones entre los estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa Supía (Caldas, Colombia) durante el segundo semestre de 2024, que fueron enseñados con la propuesta didáctica fundamentad	Definición operacional: Aplicación de una secuencia didáctica basada en las fases de la Ingeniería Didáctica con los grupos experimentale s de cuarto grado de la Institución Educativa Supía durante el segundo semestre de 2024. Clasificación: Variable compuesta. Variable dependiente: Desempeño en los resultados de aprendizaje de las fracciones. Definición conceptual: Proceso mediante el cual los estudiantes desarrollan la comprensión, representación	Equivalencia (CR_1) Cambio de registro gráfico a numérico (CR_2) Cambio de registro numérico a gráfico (CR_3)	Identificación de fracciones equivalentes Cambio de registros semióticos

	a en la Ingeniería Didáctica y aquellos que continuaron con el método tradicional.	y uso de las fracciones en distintos contextos, integrando significados parte-todo, razón, cociente y número (Kjerén, 1988; Solarte, 2018).	Relaciones de orden (CR_4)	Resolución de problemas con <u>fracciones</u>
			Porcentajes (CR_5)	Comparación numérica y gráfica
			Razones (CR_6)	Traducción simbólico-verbal
Definición operacional: Resultados obtenidos por los estudiantes en las pruebas pretest y posttest sobre comprensión conceptual, procedimental y representación de las fracciones, comparando los grupos experimental y control. Clasificación: Variable compuesta.				

Nota. La tabla presenta la operacionalización de las variables, relacionando la propuesta didáctica basada en la Ingeniería Didáctica con el desempeño en el aprendizaje de las fracciones.

En coherencia con los criterios de rigor metodológico, se precisaron las definiciones conceptual y operacional de cada variable, con el fin de evidenciar de manera clara el tránsito entre la teoría y la medición empírica. Asimismo, se especifican las escalas de medición utilizadas en los indicadores: para la variable independiente, los indicadores se evalúan en una escala ordinal, según el grado de aplicación de las fases de la Ingeniería Didáctica; y para la variable dependiente, los indicadores de desempeño (CR₁ a CR₆) se valoran también en una escala ordinal, con base en niveles de logro establecidos en las

pruebas pretest y posttest. Finalmente, se resalta que ambas variables fueron clasificadas como compuestas, lo que refuerza la coherencia interna del diseño y la validez del proceso analítico.

3.2. Diseño metodológico.

3.2.1. Definición del enfoque, diseño y tipo de investigación de la tesis.

Esta investigación se enmarca dentro del enfoque cuantitativo, el mismo se caracteriza por la recolección y análisis de datos numéricos, con el fin de explicar fenómenos, a través de la formulación de relaciones causales entre variables (Hernández et al., 2014). Dicho enfoque se justifica porque permite establecer contrastes verificables y replicables, en este caso, se busca describir el fenómeno del efecto de una intervención pedagógica estructurada basada en Ingeniería Didáctica en el rendimiento académico del concepto de fracciones con estudiantes de cuarto grado; por tanto, se trata de una relación empírica y verificable, incluso replicable, cuyas características son compatibles con el enfoque cuantitativo.

El diseño que se aplicó en esta investigación corresponde al cuasi-experimental (Ver tabla 4), que posibilita examinar relaciones de causa efecto entre variables dependientes e independientes (también llamadas variables fijas) sin requerir la asignación aleatoria de los sujetos a los grupos. En este sentido, en este tipo de diseño, los grupos preexistentes (experimental y control) permanecen intactos, lo que lo hace particularmente adecuado para este caso de estudio en un contexto escolar real (Sousa et al., 2007). Este diseño es pertinente porque garantiza condiciones de validez y confiabilidad en entornos educativos donde no es posible manipular los grupos de manera aleatoria, lo que otorga realismo a la investigación y permite generalizar hallazgos en contextos similares.

El trabajo se desarrolló en tres momentos: en la fase uno, se aplicó una prueba pretest a tres grupos experimentales (GE_1, GE_2, GE_3) y un grupo control (GC) con el

objetivo de diagnosticar el nivel de comprensión inicial sobre las operaciones con fracciones de los estudiantes de cuarto grado. En la fase dos, se implementó el tratamiento mediante una secuencia didáctica basada en los principios de la Ingeniería Didáctica y fundamentada en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, presentada solo a los grupos experimentales; mientras tanto, el grupo control recibió instrucción bajo la metodología tradicional. Finalmente, en la fase tres, se aplicó la prueba postest a los cuatro grupos con el objetivo de evaluar el impacto del tratamiento.

El uso del modelo pretest–postest con grupo control no equivalente resulta ventajoso porque permite comparar los aprendizajes iniciales y finales entre estudiantes que recibieron la intervención y quienes continuaron con la metodología tradicional. Aunque no elimina completamente las amenazas a la validez interna, como la ausencia de aleatorización, este diseño es considerado adecuado en contextos escolares reales, ya que equilibra el rigor metodológico con la viabilidad práctica. En este estudio, su aplicación hizo posible aislar con mayor claridad los efectos atribuibles a la propuesta didáctica.

Tabla 4.

Diseño de la investigación.

Grupos	Secuencia de registro		
	Pre test	Tratamiento	Postest
Experimental (GE_1)	YE ₁	X	YE ₂
Experimental (GE_2)	YE ₁	X	YE ₂
Experimental (GE_3)	YE ₁	X	YE ₂
Control (GC)	Ye1	--	Ye2

Nota. Elaboración propia.

El diseño específico que se implementó fue el de prueba pretest-postest con grupo control no equivalente. La elección de tres grupos experimentales se derivó de razones prácticas y pedagógicas: en un principio, se llevaron a cabo algunas reuniones para ver factibilidad de realizar una secuencia didáctica centrada en la enseñanza de los números fraccionarios con los docentes de grado cuarto de la I.E. Supía. De los cuatro docentes,

tres aceptaron la buena práctica y la cuarta denunció abiertamente de su desacuerdo con la propuesta pedagógica.

Por ende, desde esta perspectiva, se formaron tres grupos experimentales y un grupo control. A pesar de que la muestra quedó desbalanceada, esta problemática fue prevista y solucionada metodológicamente, para lo cual en el análisis de los datos se utilizó un Modelo Lineal Generalizado Mixto (MLGM), el cual, si permite trabajar con tamaños muestrales diferentes, e incorporar las variables de efecto aleatorio y modelar adecuadamente la variabilidad entre grupos y docentes. Esta estrategia garantizó la validez estadística del análisis y confiabilidad de los resultados obtenidos.

El tipo de estudio que se utilizó fue el explicativo, ya que busca identificar relaciones causa-efecto entre las variables independientes, tipo de enseñanza, y la dependiente, desempeño en competencias relativas a las fracciones. De acuerdo con Hernández et al. (2014), los estudios tipo explicativos no solo describen fenómenos, sino que identifican las causas que los provocan y los efectos de éstos. Con base en el estudio, se plantea hasta qué punto una propuesta de enseñanza fundamentada en la Ingeniería Didáctica tiene un efecto significativo en la adquisición de capacidades matemáticas específicas en el aprendizaje de las fracciones en contraposición a la enseñanza con metodología tradicional.

En este sentido, la fundamentación en la Ingeniería Didáctica y en la Teoría de las Situaciones Didácticas refuerza la coherencia metodológica del estudio, pues no solo se dispone de un modelo estadísticamente pertinente, sino también de un marco didáctico que orienta las fases de diseño, implementación y evaluación de la propuesta. De esta manera, el diseño metodológico no solo responde a criterios estadísticos, sino que se fundamenta en marcos didácticos sólidos que garantizan la pertinencia de los procedimientos y abren paso a la explicación detallada de los métodos, técnicas e instrumentos que se describen en el siguiente apartado.

3.2.2. Definición de métodos, técnicas e instrumentos de obtención de datos.

El diseño de la presente investigación incorporó métodos teóricos y empíricos para la consecución del conocimiento. De acuerdo con lo anterior, desde la teoría, se emplearon los métodos histórico-lógico, analítico-sintético y el enfoque sistémico, que sirvieron como marcos de referencia para la fundamentación del problema a investigar, la construcción del marco teórico y, en consecuencia, para el diseño de una intervención didáctica coherente y organizada.

El método histórico-lógico permitió rastrear la evolución del concepto de fracción y de los enfoques didácticos empleados en su enseñanza, aportando solidez conceptual al marco teórico. El método analítico-sintético posibilitó descomponer el problema en dimensiones específicas, como: equivalencia, registros de representación y resolución de problemas, y luego integrar dichos elementos en una propuesta coherente. El enfoque sistémico, por su parte, garantizó una visión integradora, articulando las fases de la investigación y asegurando consistencia entre teoría, diseño metodológico y aplicación en el aula.

En conjunto, estos métodos permitieron estudiar tanto las características esenciales del objeto de investigación, la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, como las no esenciales, asociadas a los contextos, condiciones y mediaciones pedagógicas, asegurando una comprensión profunda del fenómeno educativo abordado.

Desde la realidad, objetiva empírica, se utilizó el método cuasi-experimental con pretest-posttest y grupo control no equivalente, una opción viable para el campo escolar, en donde la asignación aleatoria de los individuos participantes no es posible. Este método fue elegido porque permite valorar con rigor los efectos de una intervención pedagógica en condiciones reales, respetando la organización preexistente de los grupos y evitando alteraciones en la dinámica escolar. Frente a otras alternativas metodológicas, el diseño cuasi-experimental se destaca porque ofrece un balance entre validez interna y viabilidad práctica, lo que lo convierte en un recurso ampliamente reconocido en estudios educativos.

De esta manera, el método define el marco general de acción investigativa, mientras que las técnicas y los instrumentos constituyen los medios operativos para obtener, organizar y analizar la información empírica necesaria. La relación entre estos tres componentes es de dependencia funcional: el método orienta, la técnica operacionaliza y el instrumento concreta la medición.

Las técnicas que se utilizaron fueron: la prueba objetiva tipo test estructurado, la codificación dicotómica de las respuestas, la clasificación de los ítems por competencias sobre fracciones, y el análisis estadístico con MMLG que, en un clima de muestra no balanceada, permiten controlar efectos fijos y aleatorios. La prueba objetiva asegura la estandarización de los resultados, la codificación dicotómica reduce la ambigüedad en la interpretación de las respuestas, la clasificación por competencias garantiza que los indicadores se relacionen con las dimensiones teóricas definidas y el uso del modelo mixto refuerza la validez estadística al considerar tanto variaciones entre estudiantes como entre grupos. En conjunto, estas técnicas permiten obtener datos confiables y pertinentes para responder al objetivo general de la investigación.

Cada técnica fue seleccionada en coherencia con el método cuasi-experimental, contribuyendo al estudio sistemático de las variables dependiente e independiente. La combinación de medición objetiva, categorización de respuestas y análisis estadístico permitió identificar relaciones causales y validar empíricamente los efectos de la propuesta didáctica.

En cuanto a los instrumentos guiados, se incluyeron: una prueba objetiva de 20 ítems para la medición de seis competencias sobre fracciones, aplicada con modalidad pretest y postest; una ficha de juicio de expertos, interpretada con el coeficiente Kappa de Fleiss, para la validez de contenido de la prueba; un formato de codificación de las respuestas para el tratamiento estadístico; y una guía de intervención didáctica con situaciones de aprendizaje, formada según las variables de la Ingeniería Didáctica y la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, que apoyó la intervención pedagógica.

Cada instrumento se diseñó a partir de los objetivos específicos, asegurando la correspondencia entre los constructos teóricos definidos y las mediciones empíricas

realizadas. La validez de contenido fue garantizada mediante la revisión por expertos y el análisis del coeficiente Kappa, mientras que la confiabilidad se estableció a través de la consistencia de las respuestas en la aplicación pretest y posttest, complementada con la estabilidad de los resultados estadísticos obtenidos por el MMLG.

Cada uno de estos instrumentos fue concebido para reforzar la validez y confiabilidad del estudio: la prueba objetiva permitió medir el desempeño de manera estandarizada, la ficha de expertos aseguró la pertinencia y claridad de los ítems, la codificación sistematizó los datos con precisión y el análisis estadístico con MMLG garantizó un tratamiento robusto de la información. La guía de intervención, finalmente, no fue un recurso operativo aislado, sino un instrumento coherente con las fases de la Ingeniería Didáctica y con la Teoría de las Situaciones Didácticas, lo que otorga al estudio un sustento metodológico sólido y directamente alineado con el propósito de favorecer aprendizajes significativos en el tema de fracciones.

3.2.3. Desarrollo de los instrumentos de obtención de datos.

Orientados bajo el enfoque cuantitativo y el diseño cuasi-experimental de esta investigación, se seleccionaron instrumentos que permitieron obtener información válida, confiable y pertinente acerca del objeto de estudio. El principal instrumento que se empleó para la recolección de datos fue una prueba objetiva de tipo test (Anexo 1), estructurada por un total de 20 ítems clasificados en seis competencias matemáticas específicas (ver tabla 5).

La elección del test como instrumento central se justifica porque permite medir el desempeño de manera estandarizada, objetiva y comparable en el tiempo. Las competencias seleccionadas reflejan los procesos cognitivos críticos para la comprensión de las fracciones en primaria: equivalencia, cambios de registro, relaciones de orden y resolución de problemas, lo cual asegura que los resultados obtenidos sean pertinentes para valorar la efectividad de la propuesta didáctica en términos de aprendizajes significativos.

Tabla 5.

Clasificación de los ítems de acuerdo con las competencias de enseñanza de las fracciones.

Competencias	Ítems del cuestionario
1. Equivalencia entre fracciones	1,8,9,10
2. Cambios de representación gráfico a numérico	2,12,13
3. Cambios de representación numérico a gráfico	3,4,5,6,7, 20
4. Resolución de problemas de fracciones como porcentaje	11, 18, 19
5. Relaciones de orden entre fracciones	14, 15
6. Resolución de problemas de fracciones como razones	16,17.

Nota. Elaboración propia

El cuestionario fue diseñado para ser aplicado en dos momentos: antes de la intervención pedagógica mediante un pretest y después de ella mediante un posttest. El propósito de este instrumento fue cuantificar los niveles de desempeño de los estudiantes en base al concepto de fracción, identificando avances atribuibles al tratamiento. Este instrumento fue seleccionado por su capacidad de arrojar resultados cuantitativos, estandarizados y comparados, elementos indispensables para el posterior análisis estadístico.

Posteriormente, se elaboró una ficha de validación por juicio de expertos (Anexo 2). El grupo de expertos estuvo conformado por tres evaluadores con alta idoneidad sobre aspectos de investigación (Ver tabla 6).

El juicio de expertos no solo garantizó la claridad y pertinencia de los ítems, sino que aportó rigor metodológico y credibilidad al estudio. La intervención de especialistas con trayectoria académica permitió contrastar la validez del instrumento frente a criterios de lenguaje, relevancia y adecuación, asegurando que los ítems estuvieran alineados con los objetivos de investigación y con el nivel cognitivo de los estudiantes.

Tabla 6.*Grupo de expertos validadores del instrumento.*

Nombre del experto	Título	Experiencia
Julio Alexander Argoti Alvarez.	Doctor en Ciencias de la Educación – Universidad de Cuauhtémoc. México	20 años
Omaira Giraldo Guerrero.	Doctora en Ciencias de la Educación – Universidad de Cuauhtémoc. México	23 años
Martha Janeth Mondragón Valencia.	Doctora en Educación – Universidad Católica de Manizales. Colombia	15 años

Nota. Elaboración propia.

Para verificar la validez y confiabilidad del instrumento de esta investigación se empleó el coeficiente Kappa de Fleiss y el coeficiente Kuder–Richardson (KR-20), los cuales arrojaron resultados altamente satisfactorios. En cuanto a la confiabilidad, el valor general del KR-20 fue de 0.928, lo que, según Oviedo y Campo-Arias (2005), indica una consistencia interna óptima del cuestionario pretest-postest. Además, todos los ítems presentaron correlaciones superiores al 50 % con el resto del instrumento, lo que respalda la solidez de cada uno de los reactivos (Galindo-Domínguez, 2020). Respecto a la validez de contenido, evaluada mediante la prueba Kappa de Fleiss, se obtuvieron niveles de concordancia casi perfecta en los criterios de claridad (0.760), pertinencia (0.782), no inducción a la respuesta (0.856) y validez (1.00), y una concordancia considerable en el criterio de adecuación del lenguaje (0.687), lo cual garantiza la pertinencia del instrumento para su aplicación en el contexto educativo seleccionado.

Estos resultados no solo confirman que el instrumento es estadísticamente confiable, sino que además refuerzan su utilidad práctica para medir aprendizajes complejos. La consistencia interna elevada asegura que las respuestas de los estudiantes son estables y coherentes, mientras que los altos índices de concordancia validan la pertinencia de cada ítem en relación con los objetivos de investigación.

Por último, se elaboró una guía didáctica con situaciones de aprendizaje, basada en los puntos del marco teórico de la Ingeniería Didáctica y la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, la cual fue el instrumento de intervención en los grupos experimentales. A pesar de no ser un instrumento de recolección de datos, su diseño fue necesario para ejecutar el tratamiento explicativo y generar la posterior prueba empírica.

La guía no se concibió como un recurso aislado, sino como un componente metodológico central, estrechamente articulado con las fases de la Ingeniería Didáctica. Esto permitió garantizar que la intervención se fundamentara en principios teóricos sólidos y que existiera una coherencia directa entre la propuesta pedagógica, los instrumentos de medición y los objetivos de la investigación.

3.2.4. Determinación de la muestra y su criterio de selección.

La muestra constituye un subconjunto representativo de una población mayor y permite llevar a cabo la investigación con un enfoque metodológico riguroso, optimizando recursos de tiempo, espacio y análisis. En este estudio, la población corresponde a la totalidad de estudiantes matriculados en el SIMAT de la institución educativa Supía, ubicada en el municipio de Supía, Caldas (Colombia).

Esta población se encuentra conformada por los estudiantes que cursan la educación básica primaria, los cuales presentan condiciones pedagógicas, institucionales y socioeconómicas homogéneas. Este universo constituye el marco de referencia del cual se extrajo la muestra, delimitada a los grupos de cuarto grado por su relevancia en el desarrollo del pensamiento matemático y la enseñanza de las fracciones.

La muestra quedó conformada por 149 estudiantes de grado cuarto de básica primaria, distribuidos en cuatro grupos oficiales: 4A-JA (37 estudiantes), 4B-JA (38), 4A-JB (36) y 4B-JB (38). Estos estudiantes fueron seleccionados de manera intencionada no probabilística, en función de la accesibilidad institucional, la disposición de los docentes para participar en el estudio y la viabilidad operativa del diseño cuasi-experimental.

El criterio de selección no probabilístico obedeció a la necesidad de trabajar con los grupos naturales existentes, evitando alteraciones en la estructura académica y respetando las dinámicas organizativas de la institución. Este enfoque garantizó que la elección de la muestra respondiera tanto a la factibilidad metodológica como a la coherencia contextual, priorizando la validez ecológica del estudio.

La elección de este tipo de muestreo respondió a la necesidad de garantizar que la unidad de muestreo, el grupo de clase, y la unidad de análisis, el estudiante individual, representaran adecuadamente las dinámicas reales del aula, manteniendo la coherencia entre la población, los objetivos del estudio y el diseño metodológico.

En términos operativos, la unidad de muestreo corresponde al grupo escolar, entendido como conjunto organizado donde se implementa la intervención; mientras que la unidad de análisis es el estudiante, sobre quien se recogen los datos cuantitativos del desempeño. Esta doble definición permite distinguir claramente los niveles de observación y análisis dentro del Modelo Mixto Lineal Generalizado aplicado.

El muestreo intencionado no probabilístico resulta pertinente en investigaciones educativas de carácter cuasi-experimental, porque prioriza la factibilidad y la coherencia con el contexto real del aula, en lugar de la representatividad estadística estricta. Aunque presenta limitaciones frente a los muestreos probabilísticos como, el sesgo potencial en la selección, constituye una alternativa válida cuando lo central es evaluar la efectividad de una intervención en condiciones naturales de la práctica pedagógica.

De esta manera, la muestra es pertinente en la medida en que refleja fielmente el contexto educativo objeto de estudio, y representativa porque incorpora diversidad en los perfiles de los estudiantes (género, rendimiento y características socioeconómicas), lo que fortalece la posibilidad de generalizar los resultados a contextos escolares con condiciones semejantes.

En este sentido, la muestra seleccionada se considera representativa del universo estudiado en tanto refleja las condiciones típicas de los estudiantes de instituciones

públicas del municipio de Supía, permitiendo la generalización analítica de los resultados hacia contextos escolares con características semejantes.

De estos cuatro grupos, tres fueron asignados como grupos experimentales (GE_1, GE_2, GE_3), donde se implementó la secuencia didáctica diseñada bajo el enfoque de Ingeniería Didáctica; y uno como grupo control (GC), que continuó con la metodología tradicional. La elección de los grupos respondió al consentimiento de los docentes responsables, quienes voluntariamente aceptaron implementar o no la propuesta pedagógica. Este criterio refuerza la pertinencia del diseño cuasi-experimental, pues permite contrastar los efectos de la intervención en escenarios auténticos y con la colaboración de los docentes, asegurando que el tratamiento se desarrollara en condiciones pedagógicas reales.

La unidad de muestreo y análisis fue el estudiante. La elección del grado cuarto como nivel de análisis se justifica porque el aprendizaje de las fracciones constituye un eje fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático en la educación básica, al ser un puente entre la aritmética elemental y el razonamiento proporcional que servirá de base para aprendizajes posteriores en álgebra y geometría. En este sentido, trabajar con estudiantes de este nivel resulta especialmente pertinente para identificar las dificultades típicas en la comprensión de las fracciones y valorar la efectividad de una propuesta didáctica innovadora.

La muestra se considera adecuada en tanto representa un segmento crítico para el aprendizaje de las fracciones, permite observar diversidad en cuanto a condiciones sociales y académicas, y posibilita la implementación del análisis estadístico mediante el MMLG, que controla el desbalance muestral y los efectos aleatorios derivados del contexto educativo. Aunque el tamaño de los grupos es desigual, el empleo del Modelo Lineal Generalizado Mixto asegura la validez de los resultados al permitir trabajar con muestras desbalanceadas y modelar la variabilidad entre grupos y docentes. Esto garantiza que los hallazgos no dependan exclusivamente de la homogeneidad muestral, sino de la robustez del análisis estadístico.

En conclusión, la determinación de la muestra responde a criterios de pertinencia educativa, factibilidad práctica y coherencia metodológica con el diseño cuasi-experimental y con el objetivo general del estudio. La selección de los estudiantes de cuarto grado, la participación voluntaria de los docentes y la aplicación de un análisis estadístico robusto aseguran que la decisión metodológica no sea únicamente operativa, sino plenamente consistente con el propósito de evaluar la efectividad de la propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica.

3.3. Trabajo de campo.

El trabajo de campo se constituyó como una fase operativa fundamental, mediante la cual se ejecutó el diseño cuasi-experimental previamente planificado. Su propósito consistió en organizar y desarrollar las acciones necesarias para aplicar la intervención pedagógica, recolectar los datos y garantizar su validez y confiabilidad, todo ello de forma rigurosa, sistemática y ética. Cada actividad diseñada respondió no solo a un criterio operativo, sino también a los principios del enfoque cuantitativo, al asegurar la objetividad de la medición y la comparabilidad entre grupos experimentales y de control.

El procedimiento se llevó a cabo durante el segundo semestre del año escolar 2024, de manera presencial, en las instalaciones de la Institución Educativa Supía (Caldas, Colombia). A continuación, se detalla la secuencia de acciones, los responsables, los participantes y los recursos empleados en cada momento.

1. Socialización inicial del proyecto:

- Acción: Reunión con los docentes de grado cuarto para presentar la propuesta de investigación, explicar los objetivos, alcances, procedimientos y solicitar la participación voluntaria.
- Responsable: Investigador principal (docente y tutor del Programa Todos a Aprender – PTA).
- Participantes: 4 docentes de cuarto grado de la Institución Educativa Supía.
- Resultado: Tres docentes aceptaron participar como responsables de los

grupos experimentales; uno asumió el grupo control.

Esta fase garantizó transparencia y compromiso, lo cual fortaleció la validez externa del estudio al contar con la aceptación voluntaria de los docentes como agentes pedagógicos.

2. Consentimientos informados:

- Acción: Entrega, explicación y recolección de consentimientos informados para estudiantes y docentes.
- Responsable: Investigador.
- Participantes: Padres y/o acudientes, docentes.
- Recurso: Formato de consentimiento informado (Anexo 3 y 4).
- Resultado: Consentimientos firmados que autorizaron la aplicación de los instrumentos y la participación en la propuesta pedagógica.

Este paso fue decisivo en términos éticos, ya que aseguró la voluntariedad de la participación y el respeto por los derechos de los estudiantes y sus familias, principios indispensables en toda investigación educativa.

3. Aplicación del pretest:

- Acción: Aplicación del instrumento inicial (prueba pretest) a los cuatro grupos.
- Responsables: Investigador y docentes participantes.
- Recursos: Cuestionarios impresos, espacios escolares.
- Resultado: Línea base sobre el nivel inicial de comprensión del concepto de fracción.

La aplicación del pretest garantizó la objetividad del punto de partida y permitió establecer un criterio de comparación indispensable en diseños cuasi-experimentales.

4. Desarrollo del tratamiento (intervención didáctica):

- Acción: Aplicación de la secuencia didáctica estructurada mediante Ingeniería Didáctica en los tres grupos experimentales.

- Duración: 6 sesiones de tres horas cada una (total 18 horas por grupo).
- Responsables: Docentes de los grupos experimentales, con orientación y acompañamiento del investigador.
- Grupo control: Recibió clases tradicionales sobre fracciones con el docente asignado, sin intervención externa.
- Recurso: Guías impresas, material concreto, tablero, aula regular, recursos TIC.

Esta fase constituyó el núcleo de la investigación, pues permitió operacionalizar la propuesta fundamentada en la Ingeniería Didáctica. Su aplicación rigurosa, bajo condiciones homogéneas, aseguró que las diferencias posteriores pudieran atribuirse al método y no a factores externos.

5. Aplicación del postest:

- Acción: Aplicación del instrumento final (prueba postest), idéntica a la prueba inicial, a los cuatro grupos.
- Responsables: Investigador y docentes.
- Condiciones: Mismas condiciones de tiempo, lugar y supervisión que el pretest.
- Resultados: Datos empíricos para el análisis de impacto del tratamiento.

El uso de un mismo instrumento bajo condiciones controladas fortaleció la confiabilidad de los resultados y aseguró la comparabilidad de las mediciones.

6. Recolección, sistematización y codificación de datos.

- Acción: Registro y codificación de las respuestas obtenidas en ambos momentos de aplicación.
- Responsable: Investigador.
- Recurso: Software estadístico (SPSS y JASP).
- Resultado: Base de datos estructurada por grupo, estudiante, competencia e ítem.

La codificación dicotómica y el registro en software especializado garantizaron la objetividad y precisión de los datos, reduciendo posibles sesgos en la interpretación.

7. Análisis estadístico:
- Acción: Procesamiento de los datos mediante estadística descriptiva e inferencial, usando Modelos Mixtos Lineales Generalizados (MMLG).
 - Responsable: Investigador con asesoría estadística externa.
 - Resultado: Resultados analíticos para responder a la pregunta de investigación.

El empleo del MMLG reforzó la validez interna del estudio, al controlar efectos fijos y aleatorios, y permitió trabajar con la muestra desbalanceada sin comprometer la confiabilidad del análisis.

Este trabajo de campo se desarrolló de manera organizada, ética y respetando los principios del enfoque cuantitativo. Su ejecución permitió garantizar la validez de los procedimientos y la fiabilidad de los resultados obtenidos, dando sustento empírico riguroso a los hallazgos de la investigación. Más allá de la descripción de actividades, constituyó un momento clave de verificación metodológica y empírica, en el que se puso a prueba la coherencia entre la secuencia didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica, los instrumentos diseñados y el objetivo general del estudio, reforzando así la solidez del proyecto doctoral. En la Tabla 7 se muestra el cronograma del trabajo de campo desarrollado.

Tabla 7.
Cronograma general de las actividades desarrolladas.

Secuencia de acciones	Acción principal	Duración estimada	Mes de ejecución (2024)	Responsable	Evidencia (Anexo)
Socialización inicial	Presentación de la propuesta y aceptación docente	1 semana	Agosto	Investigador	Firma de consentimiento (Anexo 3)
Consentimientos informados	Recolección de consentimientos	1 semana	Agosto	Investigador	Anexos 3 y 4

Secuencia de acciones	Acción principal	Duración estimada	Mes de ejecución (2024)	Responsable	Evidencia (Anexo)
Pretest	Aplicación inicial del test	1 semana	Agosto	Investigador y docentes	Registro de aplicación (Anexo 8)
Intervención didáctica	Ejecución de 6 sesiones	6 semanas	Sept.–Oct.	Docentes GE / Investigador	Guías aplicadas (Anexo 8)
Posttest	Evaluación final	1 semana	Noviembre	Investigador	Registro de aplicación (anexo 8)
Sistematización y análisis	Codificación y análisis estadístico	4 semanas	Nov.–Dic.	Investigador	Resultados en SPSS (Anexo 9)

Nota. Elaboración propia a partir de la implementación y desarrollo del trabajo de campo.

3.3.1. Aplicación de los instrumentos.

La aplicación de los instrumentos en esta investigación constituyó una fase muy importante para garantizar la validez empírica del estudio y la confiabilidad de los datos obtenidos. La ejecución de esta etapa se llevó a cabo bajo condiciones controladas dentro del entorno escolar real (Institución educativa Supía), en los cuatro grupos de estudiantes de grado cuarto que conformaban la muestra. La aplicación bajo condiciones homogéneas aseguró que las diferencias encontradas en los resultados se debieran al tratamiento pedagógico y no a factores externos, lo cual refuerza la validez interna propia del enfoque cuantitativo.

El instrumento principal fue un cuestionario estructurado tipo test, aplicado en dos momentos: antes (pretest) y después (posttest) del tratamiento pedagógico, con el fin de evaluar el desarrollo de competencias específicas relacionadas con el concepto de fracción. La prueba fue impresa, entregada en condiciones homogéneas para todos los grupos, y resuelta en un tiempo máximo de dos horas. El uso del pretest y posttest permitió establecer una línea base y una medición final comparable, garantizando así la confiabilidad de los datos y la posibilidad de atribuir cambios en el desempeño al efecto de la intervención, en coherencia con el diseño cuasi-experimental adoptado.

Para garantizar la viabilidad de su implementación, se realizó previamente una prueba piloto informal con estudiantes de grado cuarto de otra institución educativa pública, ajenos a la muestra, con el objetivo de verificar el nivel de comprensión de los ítems, la claridad del lenguaje, la adecuación del tiempo de respuesta y la estructura del instrumento. Como resultado de este pilotaje, se ajustaron cuatro ítems cuya redacción inducía a confusión, y se mejoró la organización visual del cuestionario para facilitar su resolución. Este proceso no solo corrigió problemas técnicos, sino que fortaleció la pertinencia y precisión del instrumento, asegurando que los ítems evaluaran de manera clara y adecuada las competencias relacionadas con las fracciones, lo cual incrementó la validez de contenido del cuestionario.

Durante la aplicación del pretest, uno de los grupos experimentó dificultades logísticas relacionadas con el espacio físico asignado (salón pequeño y con ruido externo), por lo que se reorganizó la ubicación para la segunda jornada de aplicación. En cuanto al postest, se detectó en un grupo la tendencia a consultas no permitidas entre compañeros, lo que fue corregido reforzando el acompañamiento docente y la supervisión directa del investigador. Estas contingencias y las medidas de control implementadas evidencian la rigurosidad metodológica del trabajo de campo, ya que muestran la capacidad de adaptación sin comprometer la calidad ni la confiabilidad de los datos recolectados.

En conclusión, la aplicación de los instrumentos fue efectiva, y los ajustes derivados de la prueba piloto contribuyeron significativamente a mejorar la calidad del proceso. Más allá de un procedimiento operativo, esta fase representó un momento clave para garantizar la coherencia metodológica entre el diseño cuasi-experimental, los principios del enfoque cuantitativo y el objetivo general del proyecto doctoral, asegurando que la recolección de datos se realizara con validez, confiabilidad y pertinencia científica.

3.3.2. Procesamiento de la información.

El procesamiento de la información en esta investigación se desarrolló a partir de la recopilación sistemática de datos empíricos, los cuales fueron obtenidos mediante la

aplicación del instrumento central (cuestionario pretest-posttest) a 149 estudiantes de grado cuarto de la institución educativa Supía. Esta recopilación se ejecutó en condiciones controladas, garantizando la homogeneidad en el tiempo de la aplicación, las instrucciones impartidas, y la vigilancia académica durante las dos jornadas escolares. Estas decisiones metodológicas son coherentes con el enfoque cuantitativo, ya que aseguran que las variaciones observadas en los resultados se atribuyan a la intervención didáctica y no a factores externos, fortaleciendo la validez interna del estudio.

Una vez recolectadas las pruebas físicas, las respuestas de cada estudiante fueron codificadas por medio de una matriz de datos, usando una escala dicotómica (1 = respuesta correcta; 0 = respuesta incorrecta). Esta codificación permitió organizar la información por grupos, por momentos de aplicación (pretest o posttest), facilitando así el posterior análisis estadístico. El uso de una codificación dicotómica, ampliamente validada en estudios educativos, otorga objetividad a la valoración de los aprendizajes y reduce sesgos interpretativos, lo que incrementa la confiabilidad de los datos.

La información fue digitada en hojas de cálculo y procesada utilizando los programas SPSS v.27 y JASP v.0.197, lo que garantizó precisión y consistencia en el análisis. Se utilizaron técnicas de estadística descriptiva para caracterizar los datos, así como análisis inferencial mediante un MMLG, lo cual permitió controlar efectos fijos (tipo de intervención y momento de evaluación) y efectos aleatorios (grupo y docente). El empleo del MMLG, en lugar de métodos estadísticos más simples, aseguró robustez al análisis al contemplar las particularidades de una muestra desbalanceada, lo que refuerza la validez de los resultados y su pertinencia en un contexto escolar real.

Los resultados obtenidos del procesamiento estadístico fueron sistematizados en tablas y gráficos (véase Anexo 9), donde se presentan los valores descriptivos, los coeficientes estimados y los efectos significativos detectados por el modelo. Asimismo, en el Anexo 9 se incluyen fragmentos de las salidas generadas por SPSS y JASP, que evidencian la aplicación exitosa de las técnicas y la correspondencia entre la base de datos y los resultados analíticos.

El proceso evidenció un alto nivel de efectividad en las vías empleadas para el acopio y tratamiento de la información. Los instrumentos demostraron ser pertinentes y comprensibles para la población objetivo, como se reflejó en la calidad de los datos obtenidos. Además, no se presentaron pérdidas significativas de información, y los errores detectados durante el proceso de codificación fueron mínimos y corregidos con revisión cruzada.

Este control cruzado aportó un nivel adicional de confiabilidad, mostrando que las decisiones técnicas adoptadas no fueron meramente operativas, sino parte de una estrategia metodológica que garantizó la precisión y consistencia de los hallazgos. En este sentido, el procesamiento de la información se consolidó como una etapa clave de validación empírica, asegurando que los datos generados fueran un reflejo riguroso del impacto de la propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica.

3.4. Análisis de los resultados en los datos obtenidos.

3.4.1. Datos sociodemográficos.

3.4.1.1. Datos sociodemográficos estudiantes.

Los estudiantes que conformaron el grupo objeto de estudio fueron 149 niños y niñas, con edades entre los 9 y 11 años, con un nivel socio - económico ubicado en los estratos 1, 2 y 3. El 90% pertenecen a los dos primeros niveles socioeconómicos, es decir, que son de escasos recursos económicos, la procedencia es de alrededor el 70% del área urbana y el 30% restante del área rural próxima. Esta población cuenta con el servicio de transporte subsidiado que ofrece el municipio y el departamento de Caldas, aunque es solo para algunas veredas, así como también el restaurante escolar.

La comunidad estudiantil está conformada por distintas etnias (Afrodescendientes, indígenas y mestizos); se encuentra también estudiantes que provienen de comunidades desplazadas debido a la violencia, es decir, es bastante heterogénea, como ocurre en la gran mayoría de las instituciones públicas del país situación a la que no es ajena la

Institución Educativa Supía del municipio de Supía Caldas, Colombia. La distribución de los grupos objeto de este estudio se muestran en la tabla 8.

Tabla 8.

Distribución de los grupos objeto de estudio por género.

Grupo	Niñas	Niños	Total
4AJA	13	24	37
4BJA	17	21	38
4AJB	16	20	36
4BJB	14	24	38
Totales	60	89	149

Nota. La tabla muestra la distribución de los cuatro grupos de la institución educativa Supía por género.

3.4.1.2. Datos sociodemográficos profesores.

El grupo de profesores estaba conformado por 2 hombres y 2 mujeres, a continuación, se describen de acuerdo a su edad y formación académica: Docente 4 - Mujer, 70 años de edad, (grupo de control); Docente 3 - Hombre, Magister en Educación Docencia, 44 años de edad; Docente 2 - Hombre, 53 años de edad, Magister en Educación, Docente 1 - Mujer, 51 años de Edad, licenciada en Ciencias Naturales y Educación Ambiental, (Estos profesores conformaron los tres grupos experimentales).

Tabla 9.

Distribución de profesores de la muestra objeto de estudio.

Docentes	Edad	Grupos
Docente 1 - Mujer	51	Experimental
Docente 2 - Hombre	53	Experimental

Docente 3 - Hombre	44	Experimental
Docente 4 - Mujer	70	Control

Nota. La tabla muestra el Grupo de docentes que conformaban la investigación.

3.4.2. Resultados comparativos del método de ingeniería didáctica.

La evaluación del impacto de la Ingeniería Didáctica (ID) frente al método tradicional (MT) en el aprendizaje de fracciones se llevó a cabo mediante el análisis de seis competencias específicas. Estas fueron: (CR_1) equivalencia entre fracciones, (CR_2) cambio de representación gráfico a numérico, (CR_3) cambio de representación numérico a gráfico, (CR_4) relaciones de orden, (CR_5) fracciones como porcentajes y (CR_6) fracciones como razones. La selección de estas competencias se fundamenta en la literatura especializada, ya que representan dimensiones esenciales del pensamiento fraccionario en la educación básica, al integrar procesos de equivalencia, comparación, proporcionalidad y conversión de registros semióticos (Duval, 2012; Kieren, 1988). Estas competencias teóricas fueron seleccionadas a partir de la literatura, por su relevancia en el desarrollo integral del pensamiento fraccionario en estudiantes de educación básica primaria.

Cada competencia representa un aspecto distinto del uso y comprensión de las fracciones, desde su equivalencia y orden hasta su relación con porcentajes, razones y cambios entre registros de representación. Esta variedad permitió una evaluación profunda y diferenciada de la efectividad de dos métodos de enseñanza aplicados (ID y MT), en la presente investigación.

Para estimar la eficacia del método con ID, frente al MT en la enseñanza de fracciones en estudiantes de 4º grado, se aplicó MLMG, considerando el efecto fijo de las variables: Método y Prueba (pretest y postest), y el efecto aleatorio de las variables: Profesor y Grupo. La selección del modelo más adecuado para cada competencia se basó en los índices AICC, BIC y -2LL:

- AICC (Criterio Corregido de Información Akaike): Indica el grado de ajuste del modelo penalizando la complejidad. Cuanto más bajo, mejor.
- BIC (Criterio de Información Bayesiana): Criterio similar al AICC que favorece modelos más parciales y sencillos. Valores bajos indican mejor ajuste.
- 2LL (Logaritmo Likelihood Negativo): Representa la verosimilitud del modelo. También se interpreta como mejor cuanto menor es su valor.

En la Tabla 10 se presentan los resultados comparativos de los grupos ID y MT, considerando las medias de los puntajes obtenidos en el postest, la significancia estadística de la interacción Método*Prueba y el valor AICC del modelo óptimo según el MLMG.

Tabla 10.

Resumen comparativo de los resultados por competencia por prueba y método.

Competencia	Media ID (Postest)	Media MT (Postest)	Interacción Método*Prueba (p)	AICC (Modelo óptimo)
CR_1: Equivalencia de fracciones	3.577	1.500	< 0.001	795.979
CR_2: Cambio gráfico a numérico	2.550	1.474	< 0.001	821.216
CR_3: Cambio numérico a gráfico	4.450	2.579	< 0.001	906.695
CR_4: Relaciones de orden	1.667	0.526	< 0.001	554.715
CR_5: Fracciones como porcentajes	1.441	0.526	< 0.001	554.191
CR_6: Fracciones como razón	1.207	0.763	0.011	412.354

Nota. Las medias presentadas en esta tabla están calculadas sobre cantidades distintas de ítems por competencia: CR_1 (4 ítems), CR_2 (3 ítems), CR_3 (5 ítems), CR_4 (2 ítems), CR_5 (3 ítems) y CR_6 (2 ítems). Esta variación en el número de preguntas debe considerarse al interpretar los valores, ya que las competencias con mayor número de ítems tienden a reflejar con más precisión la tendencia general del grupo frente a esa habilidad específica.

De acuerdo con los resultados, en todas las competencias la media posttest de los grupos ID fue superior a la de los grupos MT, lo que evidencia un mejor desempeño gracias a la intervención. Las diferencias fueron especialmente marcadas en equivalencia de fracciones (CR_1), cambio numérico a gráfico (CR_3) y relaciones de orden (CR_4), lo que sugiere que la propuesta basada en ID favorece la construcción conceptual más allá del cálculo mecánico, tal como lo plantea Artigue (1995).

En cuanto al valor de interacción Método*Prueba, cinco de las seis competencias presentaron significancia estadística muy alta ($p < 0.001$). Esto significa que la diferencia observada entre los métodos no es producto del azar, sino del tipo de enseñanza implementada. En la competencia CR_6, aunque la significancia fue menor ($p = 0.011$), se confirma también una ventaja del método ID. Estos hallazgos muestran que la ID permite abordar distintos niveles de dificultad en el aprendizaje de las fracciones, logrando mejoras incluso en aquellas competencias que tradicionalmente presentan mayores obstáculos para los estudiantes, como el trabajo con razones (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007)

Por otra parte, el análisis del AICC indica que, en cada competencia, el modelo estadístico seleccionado fue el más parsimonioso y ajustado. Esto refuerza la solidez de los resultados al garantizar que las conclusiones no se basan en modelos sobre ajustados, sino en estimaciones consistentes. Además, el efecto aleatorio del docente no resultó significativo, lo cual refleja homogeneidad en la aplicación del método y evita sesgos derivados de la práctica pedagógica individual. Este dato es particularmente relevante, ya que confirma que las mejoras observadas se deben al diseño de la secuencia didáctica y no a las diferencias en el estilo docente.

En síntesis, los resultados permiten rechazar la hipótesis nula y confirmar que la enseñanza basada en la Ingeniería Didáctica tiene un efecto significativamente superior al método tradicional en el aprendizaje de las fracciones. Este hallazgo se alinea con investigaciones previas que destacan el potencial de la ID para generar aprendizajes duraderos mediante la organización de situaciones didácticas y el uso de representaciones múltiples (Artigue et al., 1995; Brousseau, 1997). Al mismo tiempo,

resalta la necesidad de replantear las prácticas tradicionales, ya que estas tienden a limitarse a la memorización de algoritmos sin favorecer la comprensión conceptual.

3.4.3. Resultados comparativos del método de Ingeniería Didáctica versus el método tradicional mediante la aplicación del MLMG.

3.4.3.1. Resultados de la efectividad del modelo en la competencia resolución de problemas sobre equivalencia entre fracciones (CR_1).

El modelo con mejor ajuste ($AICC = 795.979$) incluye como variable aleatoria el Grupo. Las medias estimadas posttest muestran que el grupo ID ($M = 3.577$) superó ampliamente al grupo MT ($M = 1.500$). La interacción Método*Prueba fue altamente significativa ($p < 0.001$). Estos resultados indican que la ID facilitó la comprensión estructural de la equivalencia de fracciones, permitiendo a los estudiantes ir más allá de la repetición de algoritmos y reconocer el sentido de la igualdad entre fracciones distintas. Esta competencia es considerada fundamental porque, como señalan Pirie & Kieren (1994); y Charalambous & Pitta-Pantazi (2007) constituye un pilar del pensamiento fraccionario al conectar la noción de parte-todo con la proporcionalidad.

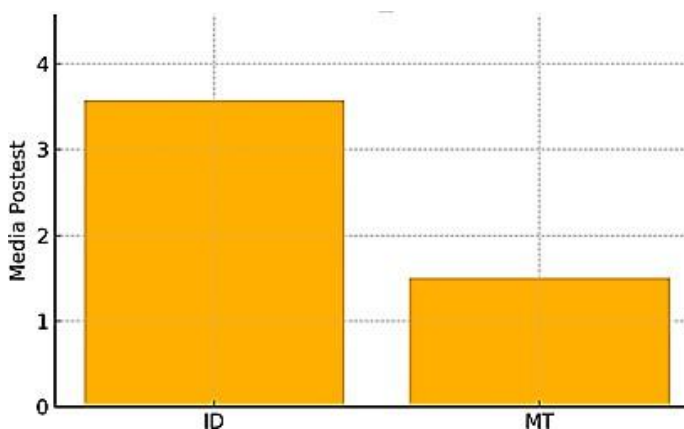


Figura 8.

Resultados de la Prueba Posttest de la competencia CR_1.

Nota. Elaboración propia.

3.4.3.2. Resultados de la efectividad del modelo en la competencia resolución de problemas sobre cambios de representación semiótica de gráfico a numérico (CR_2).

El modelo óptimo ($AICC = 821.216$) indica una media posttest de 2.550 para ID frente a 1.474 para MT. La interacción fue significativa ($p < 0.001$), aunque la diferencia fue más moderada que en CR_1. Esto sugiere que la propuesta ID fortaleció la conversión entre registros semióticos, específicamente del gráfico al numérico, favoreciendo la capacidad de interpretar diagramas y representarlos simbólicamente. De acuerdo con Duval (2006), este cambio de registro es una de las operaciones cognitivas más complejas en matemáticas, pues exige coordinar significados en sistemas diferentes; los resultados muestran que la ID apoya este tránsito al incluir actividades que vinculan representación visual y simbólica de manera progresiva.

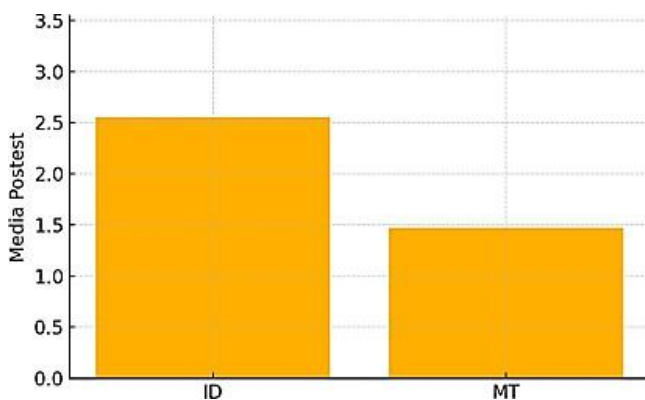


Figura 9.

Resultados de la Prueba Posttest de la competencia CR_2.

Nota. Elaboración propia.

3.4.3.3. Resultados de la efectividad del modelo en la competencia resolución de problemas sobre cambios de representación semiótica de numérico a gráfico (CR_3).

Se observa la mayor diferencia entre métodos: ID obtuvo una media posttest de 4.450 frente a 2.579 de MT. El modelo con menor AICC fue el que incluyó solo la variable Grupo. La significancia de la interacción fue alta ($p < 0.001$). Este hallazgo confirma que el método ID potencia la visualización conceptual, favoreciendo el tránsito del registro numérico al gráfico. Según Brousseau, (2002), este tipo de tareas son fundamentales porque permiten al estudiante validar sus razonamientos mediante representaciones externas. La marcada ventaja de la ID sobre el MT sugiere que las actividades diseñadas con recursos gráficos no solo facilitan la comprensión, sino que reducen los errores comunes de los estudiantes al interpretar fracciones como números aislados.

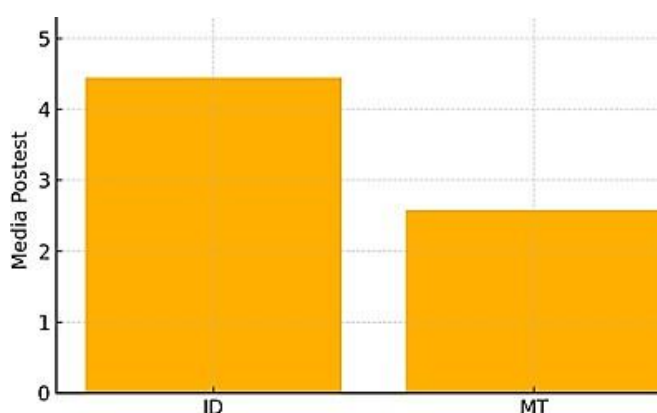


Figura 10.

Resultados de la Prueba Posttest de la competencia CR_3.

Nota. Elaboración propia.

3.4.3.4. Resultados de la efectividad del modelo en la competencia resolución de problemas sobre las relaciones de orden entre fracciones (CR_4).

El mejor modelo ($AICC = 554.715$) muestra una media posttest de 1.667 para ID frente a 0.526 para MT, con interacción significativa ($p < 0.001$). La ventaja del enfoque ID en esta competencia es clara, ya que permitió a los estudiantes comparar magnitudes y

establecer relaciones de orden entre fracciones. Investigaciones previas (Lamon, 2012) sostienen que la comparación y ordenación son procesos centrales para el razonamiento proporcional y que suelen presentar dificultades cuando la enseñanza se limita a reglas memorísticas. La ID, en cambio, al incluir situaciones de orden contextualizadas y representaciones múltiples, favorece la construcción de un sentido numérico más robusto.

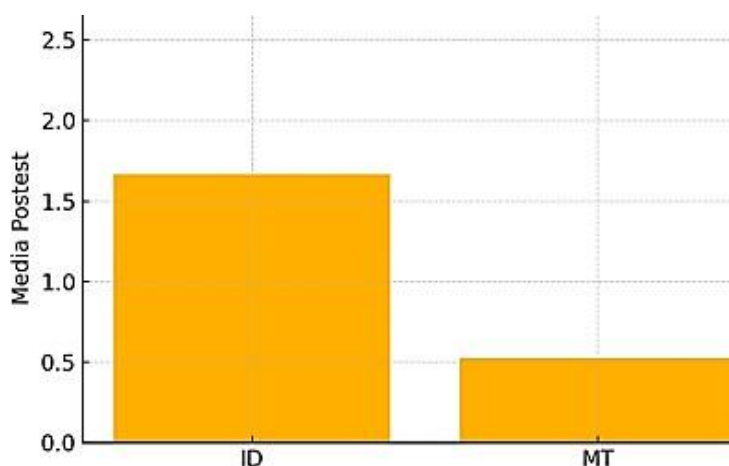


Figura 11.

Resultados de la Prueba Posttest de la competencia CR_4.

Nota. Elaboración propia

3.4.3.5. Resultados de la efectividad del modelo en la competencia resolución de problemas como porcentajes entre fracciones (CR_5).

El modelo más ajustado presenta una media posttest de 1.441 para ID y 0.526 para MT. La interacción fue estadísticamente significativa ($p < 0.001$). Estos resultados evidencian la eficacia de la ID en la transformación de fracciones a porcentajes, habilidad de alta relevancia práctica para la vida cotidiana. Tal como afirman Behr et al. (1994) comprender porcentajes como fracciones equivalentes es clave para conectar las

matemáticas escolares con contextos reales de consumo, economía y estadística básica. El diseño didáctico basado en la ID favoreció esta comprensión al incluir tareas contextualizadas en situaciones cercanas al estudiante.

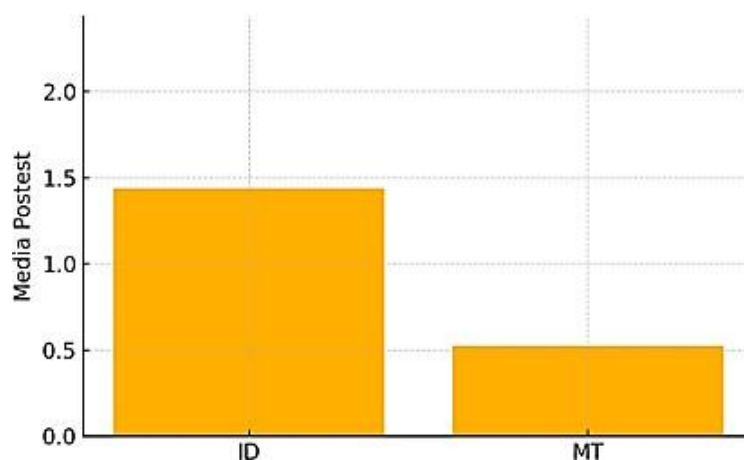


Figura 12.

Resultados de la Prueba Posttest de la competencia CR_5.

Fuente. Elaboración propia.

3.4.3.6. Resultados de la efectividad del modelo en la competencia resolución de problemas de fracciones como razón (CR_6).

Aunque la diferencia fue menos notoria, el grupo ID obtuvo mejor desempeño ($M = 1.207$) que el grupo MT ($M = 0.763$). La interacción fue significativa ($p = 0.011$), y el modelo óptimo presentó un AICC de 412.354. Esto evidencia que, aunque la propuesta ID generó mejoras, la competencia sobre razones sigue siendo un área de dificultad. Como señalan Charalambous & Pitta-Pantazi (2007), trabajar con razones implica un nivel más avanzado de abstracción proporcional que no siempre se logra en primaria. Este resultado sugiere que futuras intervenciones deben reforzar esta competencia con actividades más específicas y progresivas.

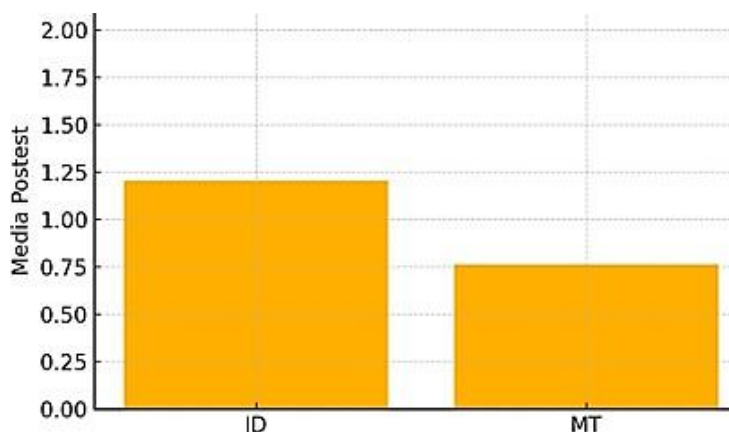


Figura 13.

Resultados de la Prueba Postest de la competencia CR_6.

Fuente. Elaboración propia.

3.5. Redacción de resultados y discusión

Los resultados obtenidos en esta investigación permiten afirmar que la aplicación de la Ingeniería Didáctica (ID) produjo mejoras significativas en el aprendizaje de las fracciones respecto al método tradicional (MT), confirmando la hipótesis alternativa. En general, los estudiantes que participaron en la secuencia fundamentada en la ID mostraron un desempeño superior en las seis competencias evaluadas, aunque con diferencias en magnitud y consistencia. Este hallazgo es relevante porque demuestra que un diseño didáctico basado en fases estructuradas y en la teoría de situaciones de Brousseau puede incidir directamente en la comprensión de un tópico considerado difícil en la educación primaria.

Desde un punto de vista pedagógico, los resultados evidencian que la ID permitió movilizar a los estudiantes de un pensamiento algorítmico a uno más conceptual, especialmente en competencias vinculadas a equivalencia y cambios de representación. Este cambio coincide con lo que plantea Duval (2006) acerca de la necesidad de

coordinar registros de representación semiótica para construir comprensión matemática. Al mismo tiempo, la aplicación del Modelo Lineal Generalizado Mixto (MLMG) permitió descartar que las diferencias se debieran a la influencia del docente, ya que el efecto profesor no resultó significativo, lo cual respalda la validez del método como estrategia replicable y transferible.

En contraste con investigaciones previas (Ríos, 2009a; Mendoza y Block; 2010; Benítez et al. 2021), que reportaban avances parciales en determinadas competencias, este estudio aporta evidencia novedosa al integrar y evaluar simultáneamente seis dimensiones del pensamiento fraccionario. La innovación principal radica en haber mostrado, con respaldo estadístico riguroso, que la ID no solo mejora la equivalencia o las conversiones, sino que también incide en competencias más complejas como porcentajes y razones, aunque en estas últimas el impacto sea aún limitado.

Desde la perspectiva curricular y docente, los hallazgos invitan a replantear la enseñanza de las fracciones en primaria. Los resultados sugieren que la equivalencia y las conversiones deben trabajarse de manera más temprana y sistemática, mientras que porcentajes y razones deben abordarse en continuidad, evitando su aislamiento como contenidos desconectados. Asimismo, la investigación revela la urgencia de fortalecer el conocimiento didáctico del contenido en los maestros, pues muchas de las dificultades observadas en los estudiantes reflejan carencias en la formación inicial y continua de los docentes.

No obstante, el estudio presenta limitaciones que deben reconocerse. El muestreo fue intencionado y la intervención tuvo una duración acotada, lo que restringe la generalización de los resultados. Además, aunque los análisis estadísticos fueron sólidos, la codificación dicotómica de respuestas no permitió profundizar en los procesos de razonamiento empleados por los estudiantes. Estas limitaciones, lejos de restar valor, abren líneas futuras de investigación: extender la duración de la intervención, incluir instrumentos cualitativos y diseñar programas de formación docente centrados en la ID.

En conjunto, los resultados muestran que la ID constituye una herramienta potente para la enseñanza de las fracciones, porque integra teoría, metodología y práctica pedagógica

en un marco coherente. A continuación, se presenta un análisis detallado por competencias, con el fin de precisar cómo incidió el método en cada una de ellas y cuáles son las implicaciones didácticas que se derivan.

3.5.1. Discusión por competencias.

Equivalencia de fracciones (CR_1): Los estudiantes que trabajaron con ID alcanzaron un desempeño significativamente mayor ($M = 3.577$) que aquellos que siguieron el MT ($M = 1.500$), confirmando que la secuencia favoreció la comprensión de la equivalencia más allá de algoritmos mecánicos. Pedagógicamente, el diseño permitió que los estudiantes reconocieran que distintas fracciones pueden representar la misma cantidad, reforzando la noción de amplificación y simplificación. Este resultado coincide con lo señalado por Ríos (2009a), y Capilla (2016), pero aporta un elemento novedoso al mostrar que la mejora no dependió del docente, sino del método aplicado, lo que da solidez a la propuesta como práctica replicable.

Cambio de representación gráfico a numérico (CR_2): En esta competencia, la ID superó al MT con medias de 2.550 frente a 1.474. El avance pedagógico se explica por la inclusión de tareas de equipartición que obligaron a coordinar lo visual con lo simbólico. Investigaciones como las de Parra-Cortés y Carmona-Ramírez (2021), ya habían identificado el obstáculo de representaciones inconsistentes; sin embargo, la presente investigación muestra que con tareas diseñadas bajo ID es posible reducir significativamente ese error, lo que constituye un aporte metodológico a la enseñanza de fracciones.

Cambio de representación numérico a gráfico (CR_3): Aquí se observó la mayor diferencia ya que los grupos con ID obtuvieron una media de 4.450 frente a 2.579 del MT. La interpretación pedagógica indica que los estudiantes lograron visualizar gráficamente fracciones impropias y heterogéneas, coordinando la noción parte-todo con lo espacial. Estos hallazgos confirman lo planteado por (Duval, 2006, 2012) sobre la centralidad de las conversiones, y contrastan con Benítez et al. (2021), quienes señalaron

apatía hacia lo gráfico manual. El aporte de este estudio fue demostrar que, con situaciones didácticas cuidadosamente secuenciadas, los estudiantes revaloran el uso de lo gráfico como recurso para comprender lo simbólico.

Relaciones de orden entre fracciones (CR_4): A pesar de la diferencia significativa ($M = 1.667$ frente a 0.526), el nivel de logro fue bajo. Muchos estudiantes continuaron aplicando razonamientos propios de los números naturales para comparar fracciones heterogéneas. Esto confirma lo expuesto por Lamon (2012) y Puga et al (2016), quienes sostienen que el orden constituye un obstáculo epistemológico persistente. El estudio aporta evidencia de que la ID reduce la dificultad, pero no la elimina, mostrando la necesidad de integrar con más fuerza la recta numérica y comparaciones explícitas en el currículo.

Fracciones como porcentajes (CR_5): Los resultados fueron bajos en general, aunque los estudiantes de ID superaron a los del MT ($M = 1.441$ frente a 0.526). La dificultad pedagógica radica en que los porcentajes suelen enseñarse de manera aislada, sin relación con fracciones y decimales. Los hallazgos coinciden con Mendoza y Block (2010), quienes denunciaron esta fragmentación. El aporte de esta investigación fue incluir porcentajes en una secuencia ID de fracciones en primaria, mostrando que, aunque los avances fueron modestos, se sientan bases para un trabajo curricular más integrado y contextualizado.

Fracciones como razones (CR_6): Esta fue la competencia con menores avances: $M = 1.207$ en ID frente a 0.763 en MT ($p = 0.011$). Aunque la diferencia es estadísticamente significativa, el bajo nivel de desempeño refleja que los estudiantes aún confunden razón con parte-todo. Castro-Rodríguez y Rico, 2021 y Ríos (2007) ya habían señalado que incluso los maestros presentan dificultades en este aspecto. El presente estudio aporta evidencia empírica de que la ID mejora parcialmente esta competencia, pero confirma que se requieren intervenciones más específicas y un trabajo curricular más sólido en proporcionalidad.

3.5.2. Síntesis crítica y proyección.

Los resultados de esta investigación confirman que la aplicación de la Ingeniería Didáctica favorece significativamente el aprendizaje de las fracciones, especialmente en las competencias vinculadas a la equivalencia (CR_1) y a los cambios de representación semiótica (CR_2 y CR_3), donde los estudiantes lograron avances notables en comparación con el método tradicional. Estos hallazgos coinciden con lo planteado por (Duval, 2006, 2012) respecto a la centralidad de las conversiones de registros en la construcción de significado y con los aportes de Aguilar-Terrones et al. (2022a, 2022b) sobre la importancia de articular diversos sistemas de representación para promover comprensión conceptual. Asimismo, se alinean con lo señalado por (Ríos, 2007, 2009a, 2009b) quien ya había evidenciado la efectividad de secuencias basadas en situaciones didácticas para mejorar la equivalencia y las transformaciones entre registros simbólico-gráfico.

Sin embargo, también se identificaron limitaciones importantes. En competencias como relaciones de orden (CR_4), fracciones como porcentajes (CR_5) y fracciones como razones (CR_6), los avances fueron parciales y en algunos casos insuficientes para superar los obstáculos conceptuales que ya habían documentado Lamon (2012), Puga et al. (2016) y Castro-Rodríguez y Rico (2021). Estos autores han señalado que el ordenamiento entre fracciones heterogéneas, la comprensión del porcentaje como operador y la diferenciación entre fracción como parte-todo y como razón constituyen dificultades persistentes tanto en estudiantes como en docentes. Los resultados de esta tesis reafirman que dichas problemáticas no se resuelven únicamente con la implementación de una secuencia breve, sino que requieren procesos de enseñanza más prolongados y un mayor acompañamiento docente.

De manera crítica, se puede afirmar que la Ingeniería Didáctica mostró un potencial transformador, pero su efectividad se vio limitada en aquellas competencias que exigen un pensamiento proporcional más avanzado. Esto concuerda con Mendoza y Block (2010b), quienes plantean que los porcentajes y razones requieren un tratamiento contextualizado y progresivo para integrarse adecuadamente en la comprensión de los

estudiantes. La novedad de este estudio radica en haber integrado estas competencias dentro de una misma secuencia en primaria, aportando evidencia empírica de sus avances y límites, lo que constituye un aporte metodológico poco explorado en la literatura existente.

A partir de estas conclusiones, se proyectan tres recomendaciones centrales. En primer lugar, se requieren investigaciones que amplíen la duración de las intervenciones con ID y que combinen análisis cuantitativos con aproximaciones cualitativas, a fin de comprender no solo los resultados, sino también los procesos de razonamiento de los estudiantes (Benítez et al., 2021). En segundo lugar, resulta fundamental fortalecer la formación docente en conocimiento didáctico del contenido, de manera que los maestros logren anticipar y gestionar los obstáculos epistemológicos asociados a las fracciones, como lo sugieren Castro-Rodríguez y Rico (2021) y Parra-Cortés y Carmona-Ramírez (2021). Finalmente, se recomienda incorporar de manera explícita la proporcionalidad, los porcentajes y las razones en el currículo escolar como parte de trayectorias de aprendizaje más integradas, en línea con lo propuesto por Lamon (2012) y Duval (2006), para evitar su enseñanza fragmentada y descontextualizada.

En síntesis, esta investigación aporta evidencias sólidas sobre la eficacia de la Ingeniería Didáctica en la enseñanza de fracciones, pero también advierte que su impacto depende de la profundidad del trabajo docente y de la continuidad curricular. Reconocer tanto los logros como las limitaciones permite no solo validar la pertinencia del método, sino también orientar futuras líneas de investigación y formación docente que potencien el aprendizaje matemático en la educación básica primaria.

Capítulo 4. Propuesta de Transformación.

Los resultados de esta investigación evidencian dificultades conceptuales persistentes en los estudiantes de cuarto grado frente al aprendizaje de las fracciones, especialmente en las competencias relacionadas con equivalencia, representación semiótica, porcentajes, razones y relaciones de orden. Estos hallazgos concuerdan con estudios internacionales que destacan la complejidad inherente al aprendizaje del número racional (Aguilar-Terrones et al., 2022; Arenas-Peñaloza y Rodríguez-Vásquez, 2021). A partir de esta realidad escolar, la investigación justifica una propuesta de transformación didáctica basada en los fundamentos de la Ingeniería Didáctica, en tanto permite estructurar, implementar y analizar propuestas de enseñanza con base en las teorías educativas contemporáneas y las necesidades del contexto.

La fundamentación teórica de esta propuesta se construye sobre la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 2007), según la cual el conocimiento emerge de la interacción entre el estudiante, el medio didáctico y el docente. Las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización propuestas en la guía de intervención permiten una progresión conceptual que potencia el aprendizaje significativo. Esta perspectiva se refuerza con los aportes de (Artigue, 1995) respecto a la microingeniería, entendida como el diseño estructurado de tareas escolares organizadas en fases para promover la construcción de conocimiento desde la experiencia concreta hacia la abstracción.

La presente propuesta no sólo recoge fundamentos teóricos validados, sino que, como resultado del proceso investigativo, modifica y adapta dichos fundamentos en función de las evidencias empíricas obtenidas. De manera específica, propone una secuencia instruccional organizada en cuatro ejes temáticos fundamentales del concepto de fracción, que abordan tanto el contenido matemático como la mediación pedagógica contextualizada. Esta transformación resulta en un aporte teórico-práctico que enriquece la aplicación de la Ingeniería Didáctica en el contexto colombiano de educación básica primaria, permitiendo a su vez superar las limitaciones de los modelos de enseñanza tradicionales centrados en la mera operación algorítmica.

Por consiguiente, la propuesta constituye un sistema teórico-práctico que combina el diseño didáctico con orientaciones metodológicas basadas en el contexto institucional, perfilando así una ruta transformadora sustentada en evidencia científica y articulada con las necesidades pedagógicas reales. Este sistema resulta en un nuevo marco de referencia para los docentes de matemáticas, en especial para aquellos que enfrentan retos semejantes en instituciones públicas con estudiantes de contextos vulnerables.

4.1. Fundamentación de la propuesta de transformación.

Los resultados de este estudio (Capítulo 3) mostraron que los estudiantes de cuarto grado presentan dificultades persistentes en la comprensión de las fracciones, particularmente en competencias como la equivalencia (CR_1), los cambios de representación semiótica (CR_2 y CR_3), las relaciones de orden (CR_4), y el uso de fracciones en porcentajes (CR_5) y razones (CR_6). Estas evidencias empíricas concuerdan con lo planteado por Aguilar-Terrones et al. (2022) y Arenas-Peñaloza y Rodríguez-Vásquez (2021) quienes señalan que el número racional constituye un campo de aprendizaje complejo que suele convertirse en obstáculo para los estudiantes de educación básica.

La relación de estas dificultades con los bajos desempeños de Colombia en pruebas estandarizadas como SABER y PISA es directa: ambas han mostrado que los estudiantes presentan debilidades recurrentes en el uso de fracciones para resolver problemas cotidianos, lo cual refleja no solo carencias conceptuales, sino también limitaciones en las prácticas de enseñanza que priorizan algoritmos por encima de la comprensión (MEN, 2021; Vanegas, 2023)

A partir de estas dificultades, la propuesta de transformación se justifica teóricamente en la Ingeniería Didáctica y en la teoría de las situaciones didácticas de Brosseau (2007) que ofrecen un marco metodológico y pedagógico capaz de traducir los hallazgos en acciones de aula con indicadores de logro verificables. La Ingeniería Didáctica, en tanto metodología de investigación en didáctica de la matemática, permite diseñar, experimentar y analizar secuencias que no solo atienden obstáculos conceptuales, sino

que generan un cambio en la práctica docente, al situar al profesor como mediador de situaciones de aprendizaje. De forma complementaria, la teoría de las situaciones didácticas aporta un andamiaje pedagógico que organiza la actividad matemática en fases de acción, formulación, validación e institucionalización, las cuales favorecen la construcción progresiva del conocimiento matemático y la autonomía del estudiante.

En esta investigación, dichos fundamentos se concretaron en orientaciones prácticas tales como la creación de tareas de exploración autónoma, el uso de material manipulativo y la promoción de discusiones entre pares para fomentar la validación argumentada. Así, las teorías no permanecieron como marcos abstractos, sino que se tradujeron en decisiones pedagógicas observables en el aula (Aravena-Díaz et al., 2025; Vorhölter, 2025).

En primer lugar, la dificultad observada en la equivalencia de fracciones (CR_1), reflejada en la incapacidad para reconocer que distintas expresiones numéricas pueden representar la misma cantidad, motivó el diseño de actividades de amplificación y simplificación apoyadas en material concreto (rectángulos fraccionados, regletas) y representaciones gráficas. El indicador de logro en este caso fue la identificación de fracciones equivalentes en más de un registro, lo que apunta a superar la visión mecánica de la equivalencia. Este énfasis responde también a lo evidenciado en PISA 2018, donde los estudiantes colombianos mostraron bajo desempeño en tareas que implicaban comparar cantidades proporcionales, una habilidad directamente relacionada con la comprensión de equivalencias.

A modo de ejemplo, una de las tareas diseñadas consistió en comparar visualmente dos rectángulos de igual tamaño divididos en partes diferentes ($\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{2}$), solicitando a los estudiantes justificar si representaban la misma cantidad y por qué. Esta actividad permitió observar la transición de una argumentación empírica a una justificación racional, coherente con la fase de validación de Brousseau (1997) y respaldada por los resultados recientes de Zhang et al. (2024) quienes demuestran que la comprensión de equivalencias mejora significativamente mediante la interacción con múltiples representaciones.

En segundo lugar, las debilidades en los cambios de representación semiótica (CR_2 y CR_3) llevaron a incorporar de manera explícita la teoría de Duval (2012) sobre registros de representación. Las tareas diseñadas promovieron la traducción de lo gráfico a lo numérico y viceversa, integrando además lo verbal y simbólico. El indicador de logro consistió en que los estudiantes pudieran expresar una misma fracción en diferentes registros sin errores de conversión, fortaleciendo así la flexibilidad cognitiva. De este modo, la Ingeniería Didáctica permitió operacionalizar la teoría de Duval en actividades específicas que respondieron directamente a los errores diagnosticados en el pretest.

Por ejemplo, se propuso la tarea del dibujo al número, en la cual los estudiantes debían representar con un dibujo la fracción $\frac{3}{5}$ y, posteriormente, traducir la representación gráfica a su expresión numérica y verbal. Este tipo de experiencia práctica se alinea con los hallazgos de Alhrahshah y Almajali (2023) quienes demostraron que la Ingeniería Didáctica favorece la comprensión de fracciones al integrar distintos sistemas de representación simbólica.

En cuanto a las relaciones de orden entre fracciones (CR_4), donde se evidenciaron serias dificultades, se optó por la construcción de líneas numéricas y comparaciones con contextos cotidianos (repartos, mediciones). Inspirados en Brousseau (1997) se diseñaron situaciones de validación que permitieran a los estudiantes justificar sus comparaciones. El indicador de logro fue la correcta jerarquización de fracciones heterogéneas mediante argumentaciones que combinaran lo gráfico y lo numérico. Aquí se articula nuevamente la pertinencia del contexto colombiano: dado que los currículos de básica primaria suelen centrarse en operaciones mecánicas, la introducción de validaciones orales y gráficas fortalece la dimensión argumentativa del pensamiento matemático, una competencia clave que exige la evaluación SABER.

Además, se incorporaron actividades de simulación con recipientes de agua y medidas fraccionarias, donde los estudiantes debían ordenar fracciones en función del nivel de llenado, integrando observación empírica y razonamiento simbólico. Este tipo de

práctica se apoya en los planteamientos de Pedersen (2021) sobre el uso de contextos reales para fortalecer la comprensión de los racionales en primaria.

En las competencias relacionadas con porcentajes y razones (CR_5 y CR_6), los resultados fueron especialmente bajos. Para abordarlos, se propusieron actividades contextualizadas en situaciones reales (juegos, recetas), entendidas como situaciones de acción en términos de Brousseau (1997). Estas actividades buscaban que los estudiantes comprendieran la fracción no solo como parte-todo, sino también como operador y medida relativa. Los indicadores de logro establecidos fueron la resolución correcta de problemas con porcentajes en contextos cotidianos y la interpretación de una fracción como razón en comparación entre cantidades. Con ello, la propuesta responde a una de las mayores críticas a la enseñanza de las matemáticas en Colombia: la escasa vinculación con contextos significativos de la vida cotidiana, lo que limita la transferencia del conocimiento a situaciones reales (MEN, 2016).

En este caso, una tarea concreta consistió en calcular la cantidad de jugo necesaria para preparar $\frac{3}{4}$ de una receta original, promoviendo el uso de la fracción como operador. Este tipo de ejercicio práctico permitió observar cómo los estudiantes aplicaban el concepto de fracción más allá del contexto escolar, reforzando la dimensión funcional del aprendizaje.

Finalmente, todas estas decisiones pedagógicas se organizaron en fases propias de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995): análisis preliminar, diseño a priori, experimentación y análisis a posteriori. Cada fase aseguró la coherencia entre los hallazgos empíricos, los fundamentos teóricos y los indicadores de logro. De este modo, la propuesta no se limita a describir una secuencia, sino que constituye un sistema de transformación pedagógica que responde directamente a las necesidades diagnosticadas en la Institución Educativa Supía y al objetivo general de favorecer aprendizajes significativos en fracciones.

Esta articulación muestra que la propuesta no solo pretende mejorar puntajes en pruebas, sino transformar la práctica docente mediante una metodología replicable y contextualizada, lo cual resulta fundamental en un país como Colombia, donde gran

parte de los maestros de primaria no son especialistas en matemáticas y requieren herramientas concretas de formación continua.

En el análisis a posteriori se triangularon los resultados del posttest con las observaciones de aula, lo que permitió validar la efectividad de las tareas diseñadas y retroalimentar la secuencia para futuras aplicaciones. Este proceso de retroalimentación evidencia la conexión entre teoría, práctica y evaluación, coincidiendo con las propuestas recientes de Vorhölter (2025) sobre investigación basada en diseño didáctico.

En síntesis, la fundamentación de esta propuesta no solo atiende las dificultades evidenciadas en el aprendizaje de las fracciones en estudiantes de cuarto grado, sino que se articula directamente con el objetivo general del proyecto doctoral: diseñar una propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las fracciones en la Institución Educativa Supía, con el propósito de favorecer aprendizajes significativos y generar estrategias de mejora pedagógica. De este modo, la propuesta se proyecta como un recurso replicable, contextualizado y científicamente validado, capaz de transformar las prácticas tradicionales y aportar a la consolidación de rutas pedagógicas innovadoras en la enseñanza de las matemáticas en la educación básica primaria.

Así, la fundamentación teórica se concreta en orientaciones prácticas y referencias recientes que refuerzan la validez pedagógica y científica del modelo, garantizando que la propuesta responda a los retos actuales de la educación matemática en el contexto colombiano.

4.2. Descripción de la propuesta de transformación.

La propuesta de transformación se basa en la implementación de una secuencia didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica, la cual fue desarrollada para superar las limitaciones observadas en la enseñanza tradicional del concepto de fracción. Esta secuencia se diseñó teniendo en cuenta tanto los resultados del diagnóstico empírico

como los referentes teóricos actualizados en el campo de la didáctica de las matemáticas. Su estructura responde al objetivo de construir aprendizajes significativos mediante tareas diseñadas desde la lógica de los registros de representación, el uso de material concreto, y la interacción activa del estudiante con el conocimiento.

4.3. Objetivos de la propuesta.

Objetivo general de la propuesta: Evaluar la efectividad de una secuencia didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica y en la teoría de las situaciones didácticas para el aprendizaje del concepto de fracción en estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa Supía, evidenciando avances en competencias específicas del pensamiento fraccionario.

Objetivos específicos:

1. Aplicar una secuencia didáctica organizada en fases y actividades articuladas a los distintos significados de la fracción (parte-todo, razón, cociente y operador), con el fin de que los estudiantes movilicen y reconstruyan sus conceptos.
2. Analizar el impacto pedagógico de la propuesta a partir de los resultados de las pruebas pretest y posttest, identificando cambios estadísticamente significativos en las seis competencias de aprendizaje de las fracciones.
3. Proponer un modelo transferible que pueda ser adaptado por otras instituciones educativas públicas con condiciones de vulnerabilidad, orientado a la mejora del rendimiento académico en matemáticas.

Cuerpo teórico-referencial:

1. La Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995): Se adoptó como metodología general para diseñar, aplicar y evaluar la secuencia. Permite articular los objetivos de aprendizaje con los recursos, actividades y formas de evaluación de manera sistemática y empíricamente validada. Su rol central radica en proporcionar el marco metodológico que integra los

aportes de las demás teorías, asegurando que las decisiones pedagógicas respondan tanto a los hallazgos empíricos como a los referentes conceptuales.

2. Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1998): Justifica la estructura de cada sesión en términos de situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización. Estas fases aseguran que el estudiante transite desde la exploración hasta la conceptualización formal. En el diagnóstico inicial se identificaron dificultades en la comprensión de la equivalencia y en el uso de porcentajes, lo que justifica la necesidad de guiar a los estudiantes a través de estas fases progresivas para pasar de la manipulación concreta a la formalización conceptual.

3. Teoría de los registros de representación semiótica (Duval, 1993): Se utilizó para diseñar tareas que involucraran distintos registros (gráfico, simbólico, verbal), con el fin de facilitar el cambio de representación como estrategia clave para la comprensión profunda del concepto de fracción. Este marco se articula con la Teoría de Situaciones Didácticas en tanto que cada fase requiere el tránsito entre registros: por ejemplo, la conversión de lo gráfico a lo numérico en CR_2 y de lo numérico a lo gráfico en CR_3, dificultades que fueron claramente evidenciadas en el diagnóstico.

4. Modelo de evaluación formativa y basada en evidencias (Hattie, 2009): Sirve de base para definir los indicadores de logro, entendiendo que el aprendizaje ocurre de forma visible cuando se establecen criterios claros y se retroalimenta continuamente al estudiante. La integración de este modelo asegura que los avances identificados en la secuencia no solo sean observables, sino también valorados en función de evidencias empíricas. De esta forma, se conecta directamente con el uso de pretest y posttest para medir el progreso en competencias específicas como equivalencia (CR_1) y razones (CR_6), donde se registraron las mayores y menores mejoras respectivamente.

En conjunto, estas teorías dialogan entre sí al aportar distintos niveles de explicación: mientras Artigue provee la metodología global, Brousseau estructura las fases de enseñanza, Duval aporta la comprensión desde los registros semióticos, y Hattie refuerza la evaluación con criterios visibles y medibles. Esta articulación asegura que la propuesta no solo tenga una base conceptual sólida, sino que esté directamente alineada

con las dificultades detectadas en el diagnóstico, garantizando así coherencia y pertinencia en el diseño didáctico.

4.4. Actividades, fases y/o etapas.

Fases operativas de la propuesta:

La propuesta sigue las fases clásicas de la Ingeniería Didáctica, que fueron adaptadas al contexto escolar y articuladas directamente con los objetivos específicos del estudio. Cada fase no solo corresponde a una etapa metodológica, sino que responde a un propósito investigativo definido, garantizando la coherencia entre los procedimientos, los objetivos y las competencias evaluadas. Además, se incluyen ejemplos de aplicación que evidencian cómo estas fases pueden ser implementadas en escenarios educativos similares.

Tabla 11.

Fases operativas de la propuesta.

Fase	Actividad principal	Competencia asociada	Propósito específico
Análisis preliminar	Aplicación del pretest, revisión de textos escolares y detección de dificultades frecuentes	CR_1 a CR_6	Identificar los obstáculos epistemológicos y didácticos presentes en el aprendizaje de las fracciones.
Diseño a priori	Construcción de la guía didáctica con actividades contextualizadas y progresivas	Todas	Organizar una ruta de aprendizaje coherente con los niveles de comprensión de los estudiantes.
Experimentación	Aplicación de la secuencia a los tres grupos experimentales	Todas	Verificar la aplicabilidad y pertinencia pedagógica de la secuencia en condiciones reales.
Análisis a posteriori	Aplicación del postest y análisis comparativo con el	Todas	Validar la efectividad del tratamiento e identificar patrones comunes de mejora o persistencia.

pretest mediante
MMLG

Nota. Elaboración propia.

En la fase de análisis preliminar, el objetivo de diagnóstico se concretó mediante la aplicación del pretest y la observación de los errores más comunes en la comprensión de fracciones. Un ejemplo práctico consistió en solicitar a los estudiantes representar $\frac{3}{4}$ con figuras geométricas y en la recta numérica, lo que permitió identificar los obstáculos en la interpretación parte-todo y en la ubicación numérica. Esta fase responde al objetivo específico de identificar las dificultades conceptuales y didácticas iniciales.

Durante el diseño a priori, se estableció la correspondencia directa con el objetivo de diseñar una propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica, integrando los resultados del diagnóstico para construir actividades progresivas. Por ejemplo, se elaboraron guías donde los estudiantes debían doblar hojas para generar fracciones equivalentes y luego compararlas, asegurando una secuencia de complejidad creciente.

En la fase de experimentación, se desarrolló el objetivo de implementar la propuesta. La secuencia fue aplicada por los docentes en los grupos experimentales, con acompañamiento del investigador, asegurando condiciones homogéneas. Durante esta fase, se registraron ejemplos de interacción docente-estudiante donde se discutían las estrategias de comparación de fracciones heterogéneas, generando argumentaciones matemáticas en concordancia con la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (2007).

Finalmente, en la fase de análisis a posteriori, se cumplió el objetivo de evaluar la efectividad de la propuesta, comparando los resultados del pretest y postest mediante el Modelo Mixto Lineal Generalizado (MMLG). Por ejemplo, los resultados evidenciaron mejoras en las competencias CR_2 y CR_3 (cambio de registros semióticos), lo que confirmó la pertinencia de las actividades diseñadas. Esta fase concluyó con la

formulación de estrategias de mejora pedagógica, respondiendo al cuarto objetivo del estudio.

Complementariamente a la organización por fases, se consideró necesario explicitar la relación entre las actividades de la secuencia didáctica, las competencias de aprendizaje evaluadas (CR_1 a CR_6), los indicadores de logro que permiten valorar su alcance y las adaptaciones previstas para estudiantes con necesidades educativas diversas. Este ejercicio busca evidenciar la coherencia entre el diseño metodológico, los objetivos de la propuesta y los principios de inclusión educativa. (Tabla 12)

Tabla 12.

Correspondencia entre actividades de la secuencia didáctica, competencias, indicadores y adaptaciones.

Actividad central de la secuencia	Competencia asociada (CR)	Indicador de logro	Adaptaciones para NEE
Construcción de fracciones equivalentes con dobleces en papel	CR_1: Equivalencia de fracciones	Identifica y representa fracciones equivalentes mediante distintos procedimientos gráficos.	Uso de papel de mayor tamaño y colores contrastantes; apoyo verbal paso a paso.
Uso de barras y discos de fracciones para comprobar equivalencias	CR_1, CR_2 y CR_3	Reconoce equivalencias y convierte entre registros gráfico ↔ numérico.	Material manipulativo ampliado; acompañamiento individual en la manipulación.
Representación en rectas numéricas de fracciones equivalentes	CR_2 y CR_3	Ubica fracciones en la recta y establece equivalencias.	Rectas ampliadas en cartulina con divisiones menos densas; apoyo visual con colores.
Actividades de amplificación y simplificación (ejercicios escritos y manipulativos)	CR_1	Aplica amplificación y simplificación para generar equivalencias correctas.	Ejemplos previos guiados; calculadora básica para verificación de operaciones.
Resolución de problemas contextualizados (ejemplo: consumo de leche, superficie)	CR_4, CR_5 y CR_6	Aplica relaciones de orden, porcentajes y razones en contextos reales.	Problemas adaptados con cifras más sencillas y apoyos gráficos.

cultivada, presentaciones escolares)			
Uso del software GeoGebra para representar equivalencias dinámicamente	CR_2 y CR_3	Interpreta la representación dinámica de equivalencias en software educativo.	Trabajo en parejas (uno maneja el software, otro explica); guías impresas paso a paso.

Nota. Elaboración propia.

Cada una de las actividades de la secuencia está vinculada de manera explícita con los objetivos de la propuesta y con los resultados esperados del aprendizaje significativo. Por ejemplo, la construcción de fracciones equivalentes con papel responde directamente al objetivo de promover la comprensión conceptual (Objetivo 2), mientras que el uso del software GeoGebra favorece la aplicación de estrategias tecnológicas y la reflexión metacognitiva (Objetivo 3). Esta relación entre actividad, competencia e indicador permite replicar la propuesta en otros contextos educativos, asegurando la coherencia entre teoría, práctica y evaluación.

En conclusión, la estructura de la propuesta, fundamentada en la Ingeniería Didáctica y en la teoría de las situaciones didácticas, se constituye en una alternativa sólida frente a los enfoques tradicionales de enseñanza de las fracciones, al promover aprendizajes activos, contextualizados y apoyados en la movilización de distintos registros de representación. Esta organización metodológica no solo responde a las dificultades conceptuales identificadas en el diagnóstico, sino que también ofrece un modelo replicable en otros contextos educativos de características similares. De este modo, la propuesta adquiere pertinencia social y académica, al aportar rutas pedagógicas innovadoras que fortalecen la enseñanza de las matemáticas en la educación básica y contribuyen a la mejora de los aprendizajes escolares en escenarios públicos.

4.5. Recursos necesarios para la aplicación de la propuesta.

Para implementar esta propuesta en el contexto institucional se requieren los siguientes recursos:

1. Capacitación básica para docentes en principios de Ingeniería Didáctica y en el uso de la guía diseñada.
2. Material concreto: regletas, fracciones de cartulina, líneas numéricas, representaciones visuales impresas.
3. Guía impresa: tanto para estudiantes como para docentes, organizada por sesiones, con lista de cotejo y retroalimentación.
4. Tiempo pedagógico estructurado: mínimo 6 sesiones de 2 a 3 horas cada una, como se implementó en esta experiencia.

Con el fin de fortalecer la viabilidad operativa, se plantea un cronograma de implementación que organiza las acciones en fases sucesivas:

Tabla 13.

Cronograma de la propuesta.

Fase	Actividad principal	Responsable	Duración estimada
Preparación	Socialización y capacitación docente en el uso de la guía	Investigador y docentes de matemáticas	1 semana
Desarrollo	Aplicación de la secuencia didáctica en el aula	Docentes con acompañamiento investigador	6 sesiones (2–3 h cada una)
Evaluación	Aplicación del postest, análisis de resultados y retroalimentación	Investigador y docentes	1 semana
Seguimiento	Sistematización de experiencias y ajustes de la guía	Docentes del área y directivos	2 semanas

Nota. Elaboración propia

Asimismo, los indicadores y criterios definidos no solo cumplen una función evaluativa, sino que constituyen una guía sistemática para la retroalimentación y el ajuste continuo de la propuesta. En este sentido, los resultados derivados de cada lista de cotejo permiten

identificar con precisión las competencias que requieren refuerzo, orientar la planificación de nuevas actividades y ajustar la secuencia didáctica según las evidencias de aprendizaje observadas. Por ejemplo, si en la competencia CR_2 (cambio de representación semiótica de gráfico a numérico) se detecta un bajo porcentaje de respuestas correctas, el docente podrá incorporar sesiones adicionales de traducción entre registros o ejercicios con GeoGebra para reforzar la comprensión.

De igual modo, los criterios de participación activa y autonomía en el aula sirven como base para diseñar estrategias de seguimiento docente, promoviendo la autorreflexión pedagógica y el mejoramiento de las prácticas de mediación. Entre los productos esperados de esta etapa se incluyen informes de avance institucional, portafolios de evidencias estudiantiles, guías revisadas y versiones ajustadas del material didáctico, los cuales garantizan la sostenibilidad y aplicabilidad de la propuesta en escenarios educativos similares. De esta forma, los indicadores no se conciben como elementos estáticos, sino como herramientas dinámicas de mejora continua que articulan la evaluación empírica, la reflexión docente y la innovación pedagógica.

4.6. Resultados.

El presente apartado expone los resultados asociados a la propuesta de transformación didáctica, entendidos como los efectos pedagógicos y formativos derivados de la implementación de la guía basada en la Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las fracciones. Estos resultados no buscan reiterar los hallazgos estadísticos ya presentados en el capítulo de resultados de la investigación, sino interpretar los cambios observados en los procesos de aprendizaje y en la dinámica de aula, a la luz de los criterios definidos para evaluar la efectividad de la propuesta.

En primer lugar, en relación con la mejora en el desempeño académico, se evidenció que los estudiantes del grupo experimental mostraron avances sostenidos entre el pretest y el posttest, coherentes con los resultados obtenidos mediante el Modelo Lineal Generalizado Mixto (MLMG). Estos avances se reflejaron no solo en el incremento de

los puntajes, sino en una mayor comprensión conceptual del número fraccionario, especialmente en las competencias asociadas a la equivalencia, la interpretación gráfica y la conversión entre representaciones. Desde la perspectiva de la transformación didáctica, estos resultados indican que la propuesta favoreció procesos de aprendizaje más profundos y estables, superando enfoques centrados exclusivamente en la repetición de procedimientos.

En cuanto a la diversidad de representaciones utilizadas se observó que los estudiantes lograron movilizar de manera progresiva distintos registros de representación (numérico, gráfico) durante el desarrollo de las actividades propuestas. Este recorrido entre representaciones resultó en un avance sustancial en la comprensión estructural de las fracciones, validando la hipótesis de cambio conceptual propuesta en este trabajo. Más aún, la articulación entre registros permitió establecer relaciones más robustas entre los diferentes significados matemáticos, reduciendo los errores de interpretación vinculados a visualizaciones fragmentadas o aisladas del concepto.

En cuanto a la participación activa y la autonomía de los estudiantes en el aula, los registros de observación y el posterior análisis cualitativo de las producciones de los estudiantes mostraron un incremento en la formulación de hipótesis, la validación de ideas y la reflexión sobre los propios procedimientos. Se pudieron ver estudiantes más activos en la construcción de su propio conocimiento, puesto que comenzaron a discutir matemáticamente poniendo en juego argumentos, justificando sus respuestas y recapacitando sus estrategias de solución. Desde esta transformación de la dinámica de aula, se pone en evidencia una transformación por parte de los profesores en la práctica pedagógica, donde colocaron al estudiante como sujeto de la enseñanza y no como objeto de contenido.

Finalmente, en relación con el uso efectivo de la guía didáctica, se constató una coherencia significativa entre las fases de la guía, las actividades desarrolladas y los resultados de aprendizaje alcanzados. La estructura secuencial de la propuesta, basada en las fases de la Ingeniería Didáctica, permitió orientar de manera clara el proceso de enseñanza-aprendizaje y facilitar la progresión cognitiva de los estudiantes. Las listas de

cotejo diseñadas para cada una de las competencias (CR_1 a CR_6) posibilitaron un seguimiento sistemático de los aprendizajes logrados y de los procesos de razonamiento matemático desarrollados, consolidando la guía como una herramienta eficaz para la enseñanza de las fracciones en educación primaria.

En síntesis, los resultados de la propuesta de transformación didáctica evidencian que la implementación de una enseñanza de las fracciones fundamentada en la Ingeniería Didáctica no solo mejora el desempeño académico, sino que transforma los procesos de aprendizaje, la participación estudiantil y la práctica docente, aportando elementos valiosos para la innovación pedagógica en contextos educativos similares.

4.7. Valoración/ evaluación / validación de la propuesta de transformación.

Como parte central del presente trabajo, resulta indispensable destacar que la propuesta no solo fue diseñada e implementada en el aula, sino también sometida a un proceso de validación externa por parte de expertos en didáctica de las matemáticas y en Ingeniería Didáctica. Este procedimiento metodológico asegura que la propuesta trascienda la dimensión empírica de los resultados estadísticos y se consolide como un modelo pedagógico con pertinencia y validez en contextos similares.

La revisión por expertos permitió garantizar que los fundamentos teóricos, la secuencia de actividades y los indicadores de logro fueran pertinentes y coherentes con los hallazgos del diagnóstico inicial. Además, dicha validación externa otorgó mayor confiabilidad al proceso, ya que se complementó la valoración estadística (basada en pruebas pretest y posttest) con un juicio académico especializado que consideró los criterios de pertinencia, coherencia, aplicabilidad, innovación y factibilidad.

Para operacionalizar este proceso, se diseñó una rúbrica de validación (Anexo 5) que fue aplicada por los expertos y que contempló una escala de valoración de 1 a 5 en cada criterio, junto con observaciones cualitativas que enriquecieron la retroalimentación sobre la propuesta. De manera paralela, se incluyeron las hojas de vida de los

validadores externos (Anexos 6), con el fin de evidenciar su idoneidad académica y experiencia investigativa en el campo de la educación matemática, garantizando transparencia y trazabilidad en el proceso de revisión.

Criterios de evaluación:

Para garantizar la validez y confiabilidad de la evaluación de la propuesta, los criterios previamente definidos se operacionalizaron mediante listas de cotejo, las cuales facilitaron el registro de evidencias puntuales durante las actividades prácticas y de resolución de problemas. De esta forma, cada criterio de evaluación no solo quedó formulado en términos generales, sino también traducido en indicadores observables y medibles, lo cual asegura la coherencia entre los objetivos de la propuesta y los resultados obtenidos.

En este sentido, los criterios seleccionados buscan medir la efectividad de la propuesta tanto en términos cognitivos como didácticos, con base en cuatro aspectos:

1. Mejora en el desempeño académico: A través de la comparación de resultados entre pretest y postest, utilizando modelos estadísticos robustos (MMLG), se evidencia el impacto directo del tratamiento.
2. Diversidad de representaciones utilizadas: Se analiza si los estudiantes lograron movilizar distintos registros (numérico, gráfico, verbal), lo cual es fundamental para validar la hipótesis de cambio conceptual.
3. Participación activa y autonomía en el aula: Evaluada a través de la observación docente y el análisis cualitativo de las producciones estudiantiles, considerando criterios como formulación de hipótesis, validación de ideas y reflexión.
4. Uso efectivo de la guía didáctica: Se valora la coherencia entre las fases de la guía, las actividades propuestas y los resultados obtenidos en términos de comprensión.

Con base en estos criterios, se diseñaron las listas de cotejo correspondientes para cada una de las competencias (CR_1 a CR_6), las cuales permiten un seguimiento preciso de los aprendizajes logrados y de los procesos de razonamiento matemático desarrollados por los estudiantes.

Tabla 14.

Lista de cotejos para las 6 competencias evaluadas en la propuesta de transformación.

Lista de cotejo para la competencia CR_1: equivalencia de fracciones			
Indicador observable	S í	No	Observaciones
1. Identifica correctamente fracciones equivalentes usando material concreto (discos, barras, rectas numéricas).			
2. Verifica la equivalencia aplicando el producto cruzado.			
3.Explica con sus propias palabras por qué dos fracciones son equivalentes.			
4. Resuelve problemas contextualizados aplicando el concepto de equivalencia.			
Lista de cotejo para la competencia CR_2: cambio de representación semiótica de gráfico a numérico			
1.Traduce correctamente una representación gráfica a fracción numérica.			
2. Usa el material concreto para justificar su cambio de representación.			
3.Explica verbalmente el procedimiento realizado.			
Lista de cotejo para la competencia CR_3: cambio de representación semiótica de numérico a gráfico			
1. Representa en diagramas o rectas numéricas una fracción numérica dada.			
2. Utiliza correctamente material concreto para realizar la representación gráfica.			
3. Justifica la equivalencia entre la representación numérica y gráfica construida.			
Lista de cotejo para la competencia CR_4: relaciones de orden entre fracciones			
1.Ordena correctamente fracciones de menor a mayor o viceversa.			
2.Compara fracciones con diferente denominador usando representaciones visuales.			
3.Argumenta la relación de orden utilizando estrategias de simplificación o equivalencia.			
Lista de cotejo para la competencia CR_5: fracciones como porcentajes			
1.Convierte correctamente una fracción en porcentaje.			
2.Explica con ejemplos cotidianos la relación entre fracción y porcentaje.			
3. Resuelve problemas aplicados al contexto (por ejemplo, porcentajes de cantidades reales).			
Lista de cotejo para la competencia CR_6: fracciones como razón			
1.Interpreta fracciones como razón en situaciones reales.			
2.Explica verbalmente el sentido de la razón (comparación entre dos cantidades).			
3.Resuelve correctamente problemas contextualizados de razón usando fracciones.			

Nota. Elaboración propia.

Indicadores:

Los indicadores corresponden a las seis competencias evaluadas por el instrumento, y se definieron como sigue:

1. Porcentaje de respuestas correctas por competencia (CR_1 a CR_6).

2. Número de estudiantes que logran cambiar de un registro a otro sin errores (verbal a gráfico, numérico a simbólico, etc.).
3. Nivel de argumentación en la validación de resultados en clase.
4. Grado de autonomía en la resolución de problemas planteados en la guía.

Producto final

La guía didáctica, validada mediante criterios teóricos y empíricos, se constituye como el producto principal de esta investigación. Su estructura, fundamentación y resultados obtenidos permiten considerarla como una herramienta pedagógica transformadora, útil no solo para la Institución Educativa Supía, sino para cualquier institución pública que busque mejorar el aprendizaje de las fracciones desde una perspectiva pedagógica activa y científica. De manera complementaria, se incorporan recursos digitales que enriquecen el producto principal, ofreciendo materiales interactivos, simuladores y repositorios de acceso abierto que amplían las posibilidades de implementación y favorecen tanto el aprendizaje autónomo como la actualización docente (Anexo 7)

SECUENCIA DIDÁCTICA

La secuencia es denominada “Secuencia didáctica basada en la Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las fracciones en estudiantes de cuarto grado de primaria”, esta se apoya principalmente en el trabajo con material concreto como el fracciogram (discos de fracciones), barras de fracciones, rectas numéricas de fracciones, dominó de fracciones, lotería de fracciones y un aplicativo en el Software libre GeoGebra sobre equivalencia de fracciones; en el diseño didáctico fue utilizada la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau. Esta secuencia didáctica se debe desarrollar siguiendo los pasos de las situaciones didácticas a saber: situación de acción, situación de formulación o comunicación, situación de validación y finalmente la situación de institucionalización. Las partes de la secuencia son:

Primera parte de la secuencia: Introducción en el uso de la secuencia por los estudiantes:

Aquí aparecen las instrucciones con las cuales se debe trabajar la actividad, la competencia que será desarrollada, los materiales que se requieren para realizar la secuencia, así como una copia del documento de la secuencia didáctica donde se le presentan las distintas situaciones que debe enfrentar el estudiante para el desarrollo de la misma.

LAS FRACCIONES EQUIVALENTES

Estimados estudiantes, en parejas o grupos de trabajo, deberán resolver varias secuencias que denominaremos como situaciones, en cada una de ellas encontrarás los momentos de reflexión, práctica y evaluación. Se debe leer de manera comprensiva este contenido e ir resolviéndolo de acuerdo con tu ritmo de aprendizaje, si se te presenta cualquier inquietud debes acudir con el profesor.

Competencias:

- Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones. (Estándar básico de competencia).
- Interpreta las fracciones como razón, relación parte todo, cociente y operador en diferentes contextos. (DBA 1, grado 4°).
- Describe y justifica diferentes estrategias para representar, operar y hacer estimaciones con números naturales y números racionales (fraccionarios), expresados como fracción o como decimal. (DBA 2, grado 4°).
- Establece relación mayor que, menor que, igual que y relaciones multiplicativas entre números racionales en sus formas de fracción o decimal. (DBA 3, grado 4°).

Situación Didáctica “Aprendizaje de fracciones equivalentes”

Conflicto cognitivo: ¿Es posible encontrar fracciones que teniendo distinto numerador y denominador sean equivalentes?

Seguidamente se relatan los rasgos y pasos que se deben seguir previamente, así como en el desarrollo de la misma.

1. La secuencia está conformada por dos partes: Una guía impresa con unas

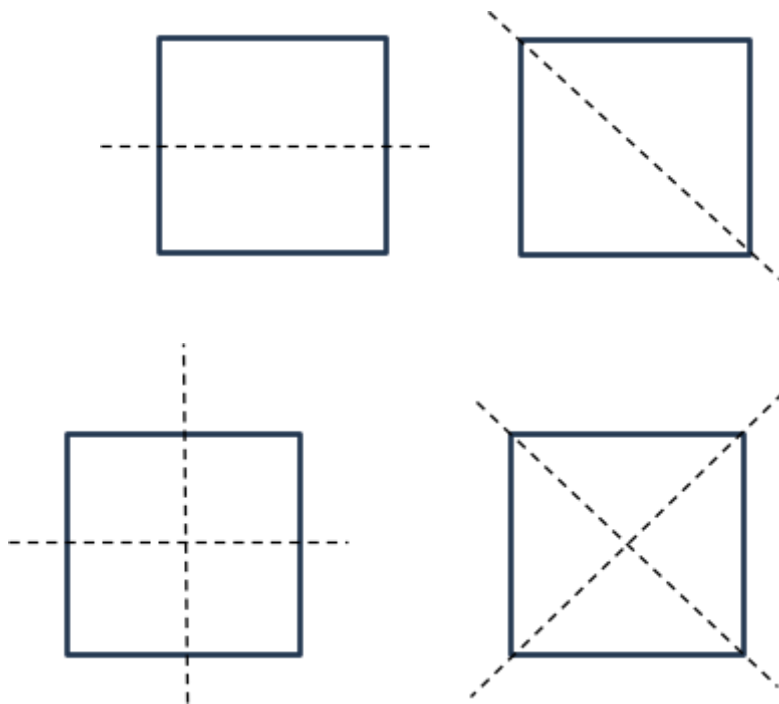
definiciones (El documento que tiene en sus manos) y la otra parte consta de algunos materiales concretos para realizar las actividades que se proponen en la guía:

(576) Fracciones equivalentes | metodo gráfico | amplificacion y simplificación | para niños de primaria - YouTube

(576) Fracciones Equivalentes | Entender Fracciones | Introducción a Fracciones - YouTube

(576) Fracciones equivalentes con Geogebra - YouTube

2. Con las hojas de papel que se les entrega realice un doblez por la mitad y colorea $\frac{1}{2}$.
una vez coloreada, dóblalas dos veces para que queden cuatro partes iguales.



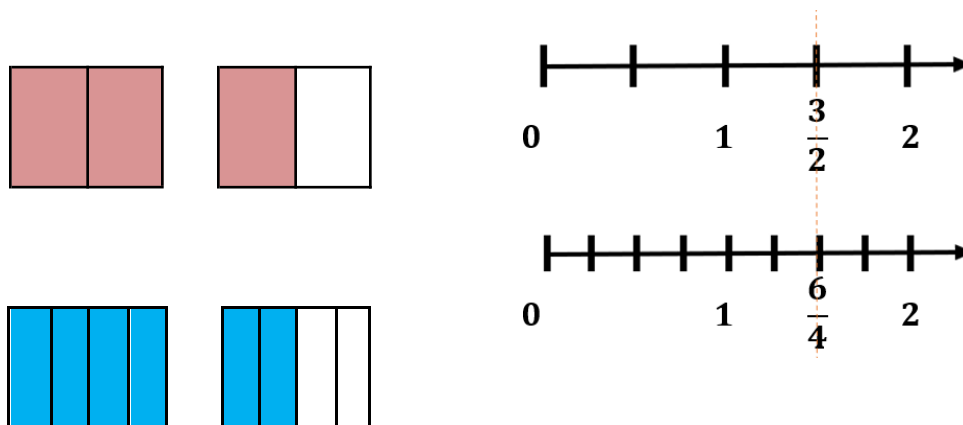
¿Qué cambios aprecian en el número de partes de la hoja y en el número de partes que se colorearon?

3. Utilizando la hoja de papel normal y la hoja de papel calcante que se le entrega realiza lo siguiente, en ambas dibuje un rectángulo, estos deben ser iguales, en la hoja de papel normal el rectángulo divídalo en 3 partes iguales y coloree la parte de la figura que representaría la fracción $\frac{1}{3}$, en el rectángulo de la hoja de papel

calcante divida el rectángulo en 6 partes iguales y coloree con un color diferente la fracción que representaría $\frac{2}{6}$, ahora debe sobreponer la hoja de papel calcante sobre la otra hoja. ¿Expliquen por escrito qué observan?

En una exposición que hizo Cristina sobre los mamíferos se tardó tres medios de hora y Luisa se tardó en la suya seis cuartos de hora. ¿Cuál de ellas gasto más tiempo en su presentación sobre los mamíferos?

En las siguientes figuras se puede observar que $\frac{3}{2}$ y $\frac{6}{4}$ están representadas por regiones iguales y además que en las semirrectas numéricas su ubicación queda en el mismo punto.



Segunda parte de la secuencia: Definición del método didáctico sobre las cuatro momentos:

situaciones de Guy Brousseau: En este punto los estudiantes deberán lograr adquirir el aprendizaje apoyados en la teoría de las situaciones didácticas haciendo uso de la secuencia didáctica que se elaboró sobre la equivalencia de fracciones.

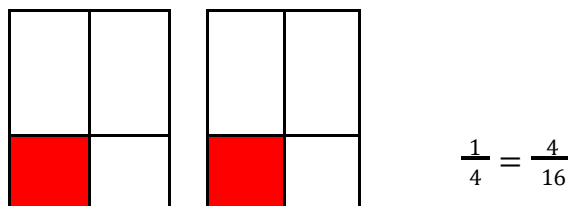
Situación de Acción: En esta situación, el estudiante se enfrenta al medio de modo que

prevea, formule y dé explicación al escenario, presenta modelos resolutivos. Aquí, el medio hace referencia a todo lo que pueda influir sobre el alumno y sobre la influencia que éste ejerza sobre su entorno (Brousseau, 2007).

En la presente investigación, los estudiantes se enfrentarán a las situaciones propuestas en la secuencia didáctica para que encuentren varias fracciones equivalentes para completar las tablas que se les presentan logrando con esto la acción que propone Brousseau aprovechando los materiales concretos que se les proporciona como son las barras de fracciones, los discos de fracciones y las rectas numéricas para fracciones, son una forma nueva para los estudiantes ya que van descubriendo las distintas equivalencias.

Aprende

Cuando dos fracciones son equivalentes representan la misma parte de la unidad.



Para identificar rápidamente si dos fracciones son equivalentes se multiplican sus términos en cruz y se debe obtener el mismo resultado; para la obtención de fracciones equivalentes se puede amplificar o simplificar.

Del ejemplo anterior y la comprobación del producto en cruz obtenemos:

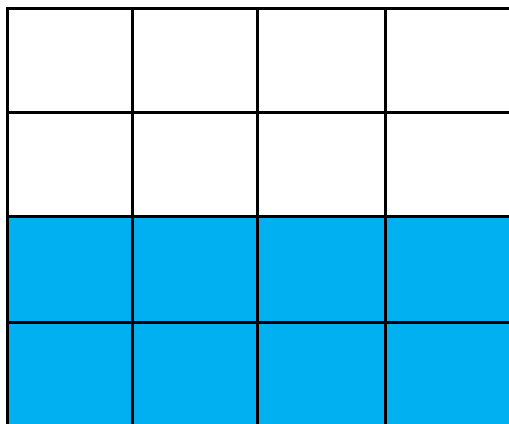
~~$$\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$$~~

$$1 \times 16 = 4 \times 4$$

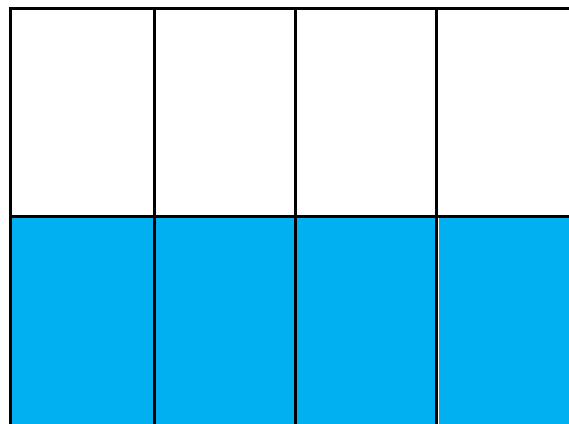
$$16 = 16$$

Las fracciones son equivalentes cuando representan la misma cantidad.

Ejemplo: Carlos y Andrés limpian las ventanas de una construcción.



Carlos limpia $\frac{8}{16}$ de ventana.



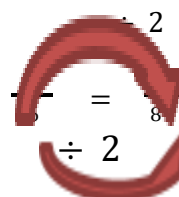
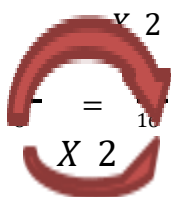
Andrés limpia $\frac{4}{8}$ de ventana.

Los dos limpian la misma cantidad de superficie.

Las fracciones $\frac{8}{16}$ y $\frac{4}{8}$ representan igual cantidad. Se llaman fracciones equivalentes.

Se expresa así: $\frac{8}{16} = \frac{4}{8}$. Si sus términos se multiplican en cruz se obtiene el mismo resultado.

Las fracciones equivalentes están relacionadas entre sí.



Una fracción se amplifica cuando se multiplican el numerador y el denominador por el mismo número.

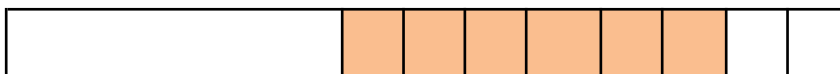
Una fracción se simplifica cuando se dividen el numerador y el denominador por el mismo número.

Amplificación y simplificación de fracciones

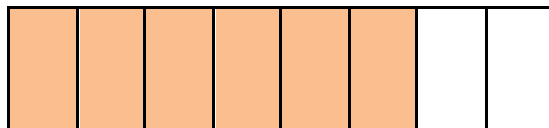


Juan y su mamá quieren preparar masa para hacer galletas y para ello gastan $\frac{6}{8}$ de la masa que hicieron para hacer galletas con sabor a vainilla. Juan dice que esta cantidad de masa es equivalente a $\frac{12}{16}$ y que también a $\frac{3}{4}$. ¿Tiene razón Juan?

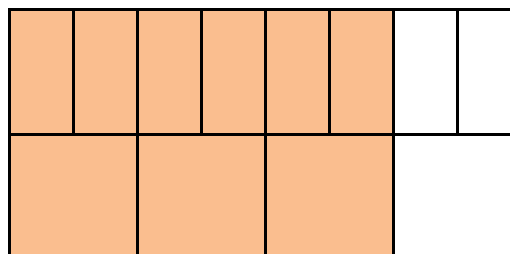
Para comprobar si Juan tiene razón es posible hacer una representación de la fracción $\frac{6}{8}$ y buscar fracciones que sean equivalentes con esta a partir de su representación.

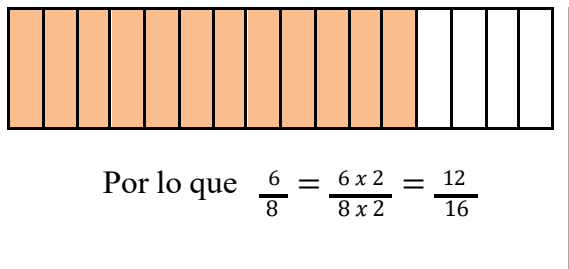


Una forma consiste en dividir cada una de sus partes en dos (esto es amplificar por 2).



Otra manera consiste en unir dos partes en una sola (simplificación entre 2).





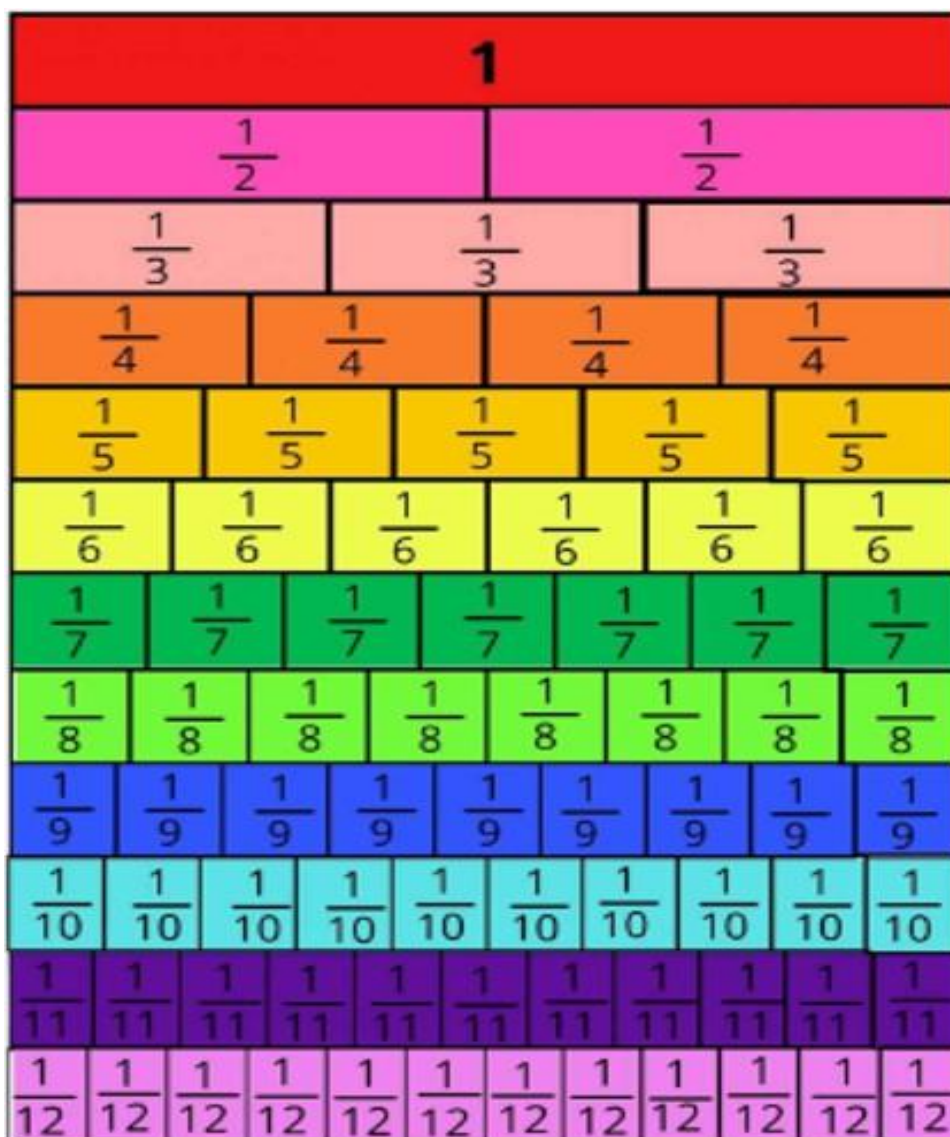
Por lo que $\frac{6}{8} = \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}$

Entonces se puede afirmar que Juan tiene razón, dado que las fracciones $\frac{12}{16}$ y $\frac{3}{4}$ son equivalentes a la fracción $\frac{6}{8}$.

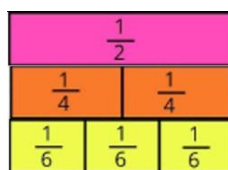
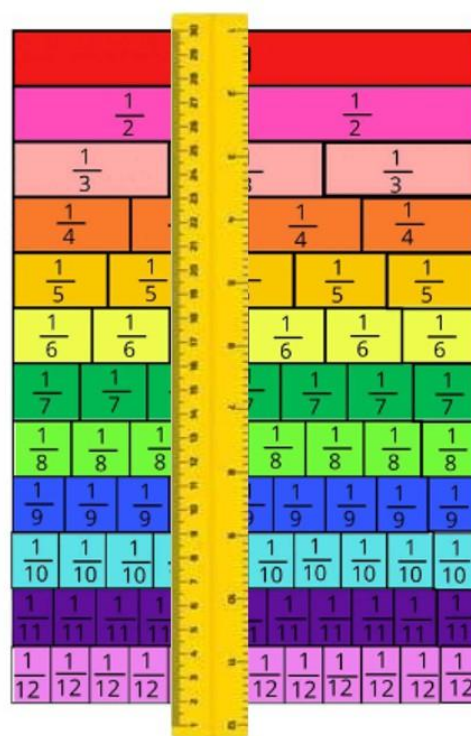
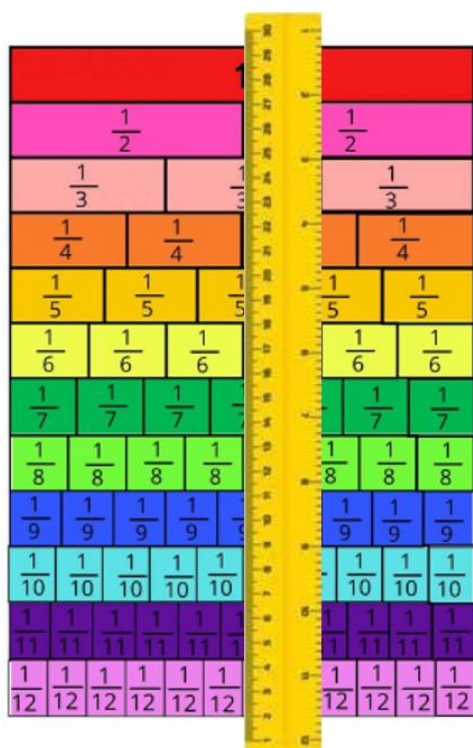
Aprende

La amplificación hace posible encontrar fracciones equivalentes a una fracción dada al multiplicar su numerador y denominador por un mismo número. La simplificación de fracciones se hace al dividir su numerador y denominador por un mismo número (Divisor común).

Fracciones equivalentes con la barra de fracciones

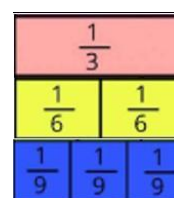


Empleando la hoja de cartulina con las barras de fracciones que se les entrego y antes de recortar las piezas que las conforman observa las distintas posibilidades de representar una unidad y sus distintas equivalencias no solo de la unidad sino de algunas de sus partes y partes más pequeñas empleando la hoja de cartulina de las regletas y una regla; observa [\(579\) Uso de las regletas en fracciones equivalentes c :D - YouTube](#)



Aquí es posible apreciar algunas fracciones que son equivalentes con la fracción $\frac{1}{2}$

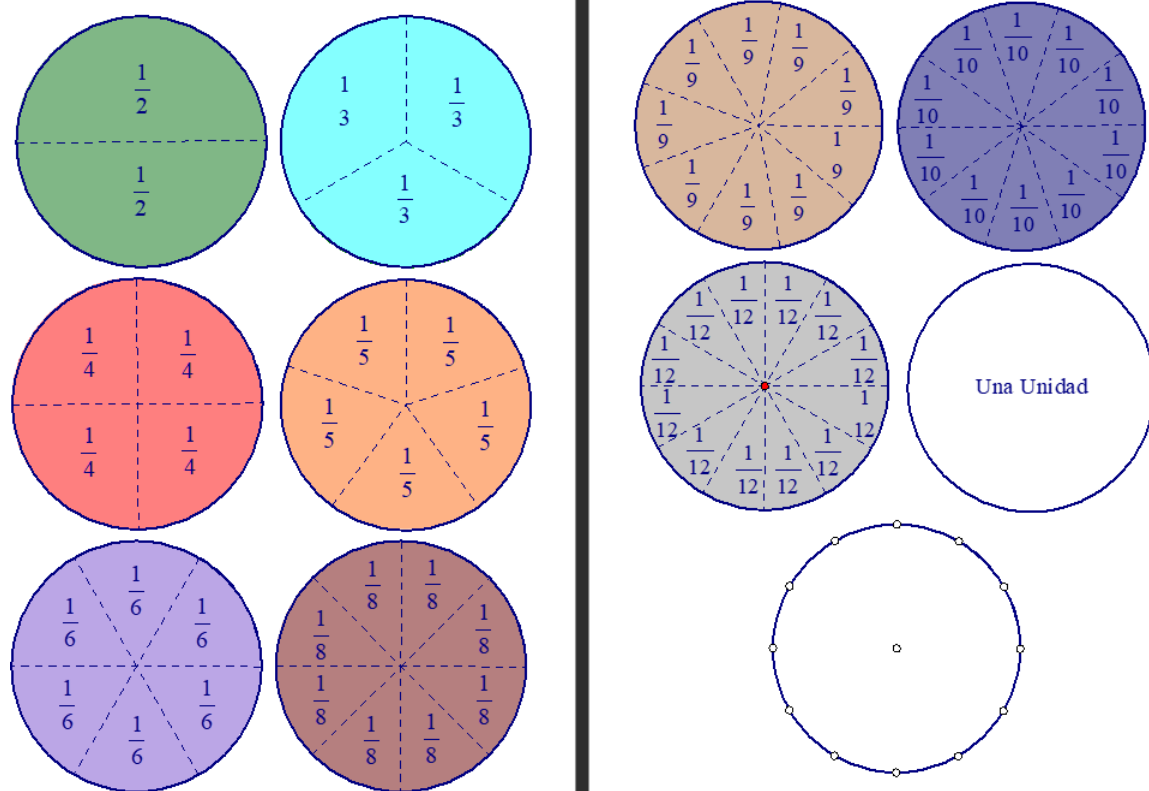
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$



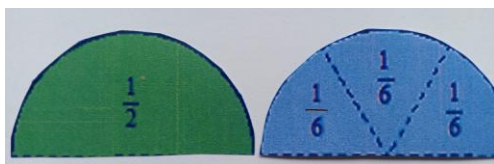
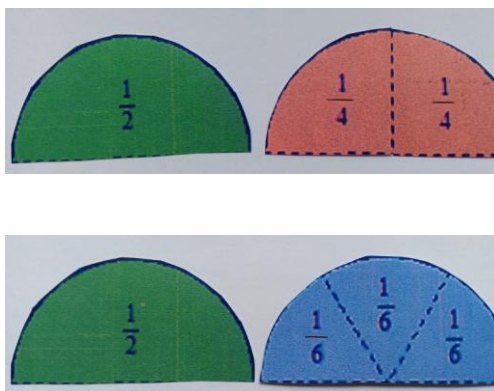
Aquí es posible apreciar algunas fracciones que son equivalentes con la fracción $\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$$

Es posible también hacer equivalencias de fracciones empleando los discos de fracciones https://drive.google.com/file/d/1UktNGqPf6bcWwETUIVvGd5-8l66RIJkc/view?usp=drive_link

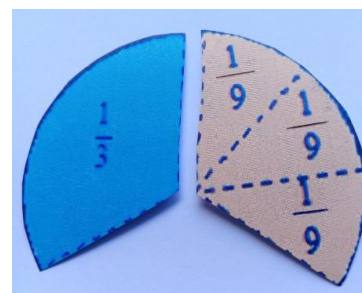
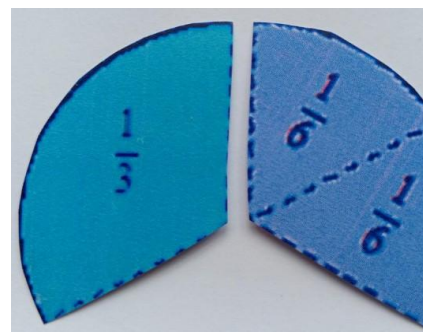


Para hallar la fracción equivalente de una fracción cualquiera usando los discos de fracciones, se toman los discos como representación de una fracción determinada y posteriormente se buscan otras fracciones que tengan igual tamaño. Cuando se representan dos fracciones con los discos de fracciones o partes de estas y ocupan la misma área, se puede afirmar que son fracciones equivalentes.



Aquí es posible apreciar algunas fracciones que son equivalentes usando partes de discos de fracción con la fracción $\frac{1}{2}$

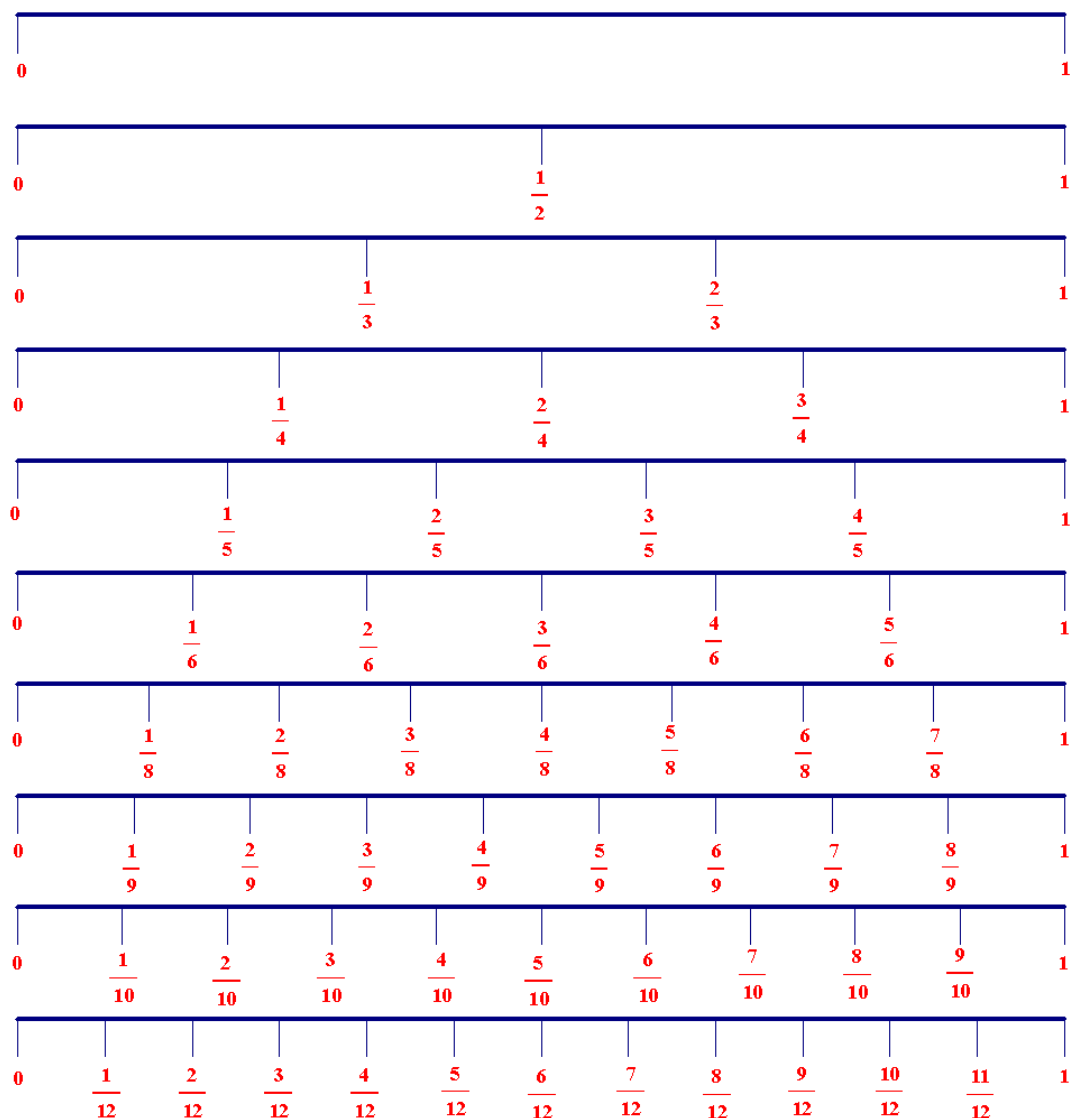
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$



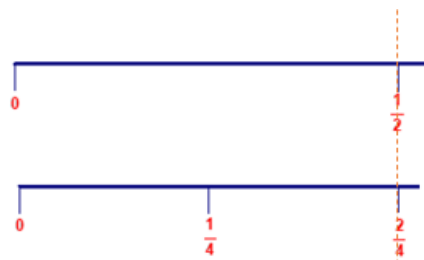
Aquí es posible apreciar algunas fracciones que son equivalentes usando partes de discos de fracción con la fracción $\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$$

Es posible también hacer equivalencias de fracciones empleando las rectas numéricas de fracciones. (582) Rectas numéricas para fracciones equivalentes - YouTube

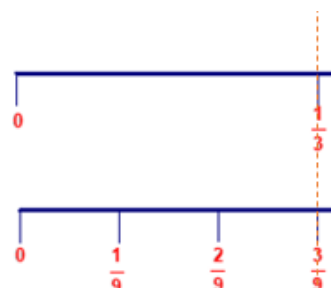


Para hallar la fracción equivalente de una fracción cualquiera usando las rectas numéricas para fracciones, se toma una recta numérica para fracciones determinada y posteriormente se buscan otras rectas numéricas de fracciones que tengan igual tamaño y diferentes divisiones; se ponen una debajo de la otra coincidiendo desde el cero y verificando que tengan igual longitud. Cuando se representan dos fracciones con las rectas numéricas para fracciones y tienen distinto número de divisiones y estas tienen la misma longitud, se puede afirmar que son fracciones equivalentes.



Aquí es posible apreciar dos fracciones que son equivalentes usando partes de las rectas de fracciones, así:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$



Aquí es posible apreciar dos fracciones que son equivalentes usando partes de las rectas de fracciones, así:

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$$

(580) Fracciones equivalentes con Geogebra - YouTube

Actividades para el aprendizaje

Determina si cada par de fracciones son equivalentes empleando los discos de fracciones que deberás pegar en la casilla correspondiente y realizar la comprobación numérica, posteriormente responde si son o no equivalentes.

<i>Fracciones</i>	<i>Material concreto</i>	<i>Comprobación numérica</i>	<i>Respuesta</i>
$\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$		$1 \times 10 = 5 \times 2$ $10 = 10$	Si ☐ No ☐
$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$			Si ☐ No ☐
$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$			Si ☐ No ☐

$\frac{3}{4} = \frac{5}{8}$			Si ☐ No ☐
$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$			Si ☐ No ☐
$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$			Si ☐ No ☐
$\frac{3}{7} = \frac{2}{5}$			Si ☐ No ☐
$\frac{6}{9} = \frac{2}{6}$			Si ☐ No ☐
$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$			Si ☐ No ☐
$\frac{2}{4} = \frac{4}{7}$			Si ☐ No ☐
$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$			Si ☐ No ☐

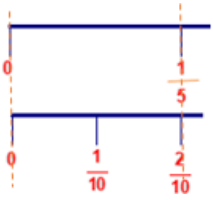
Determina si cada par de fracciones son equivalentes empleando las barras de fracciones que deberás pegar en la casilla correspondiente y realizar la comprobación numérica, posteriormente responde si son o no equivalentes.

<i>Fracciones</i>	<i>Material concreto</i>	<i>Comprobación numérica</i>	<i>Respuesta</i>
-------------------	--------------------------	------------------------------	------------------

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$	$1 \times 6 = 3 \times 2$ $6 = 6$	Si No
$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$			Si No
$\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$			Si No
$\frac{7}{2} = \frac{2}{7}$			Si No
$\frac{3}{4} = \frac{8}{12}$			Si No
$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$			Si No
$\frac{3}{7} = \frac{6}{7}$			Si No
$\frac{6}{9} = \frac{1}{3}$			Si No
$\frac{4}{5} = \frac{4}{10}$			Si No

$\frac{2}{4} = \frac{4}{7}$			Si No
$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$			Si No

Determina si cada par de fracciones son equivalentes empleando las rectas numéricas de fracciones que deberás pegar en la casilla correspondiente y realizar la comprobación numérica, posteriormente responde si son o no equivalentes.

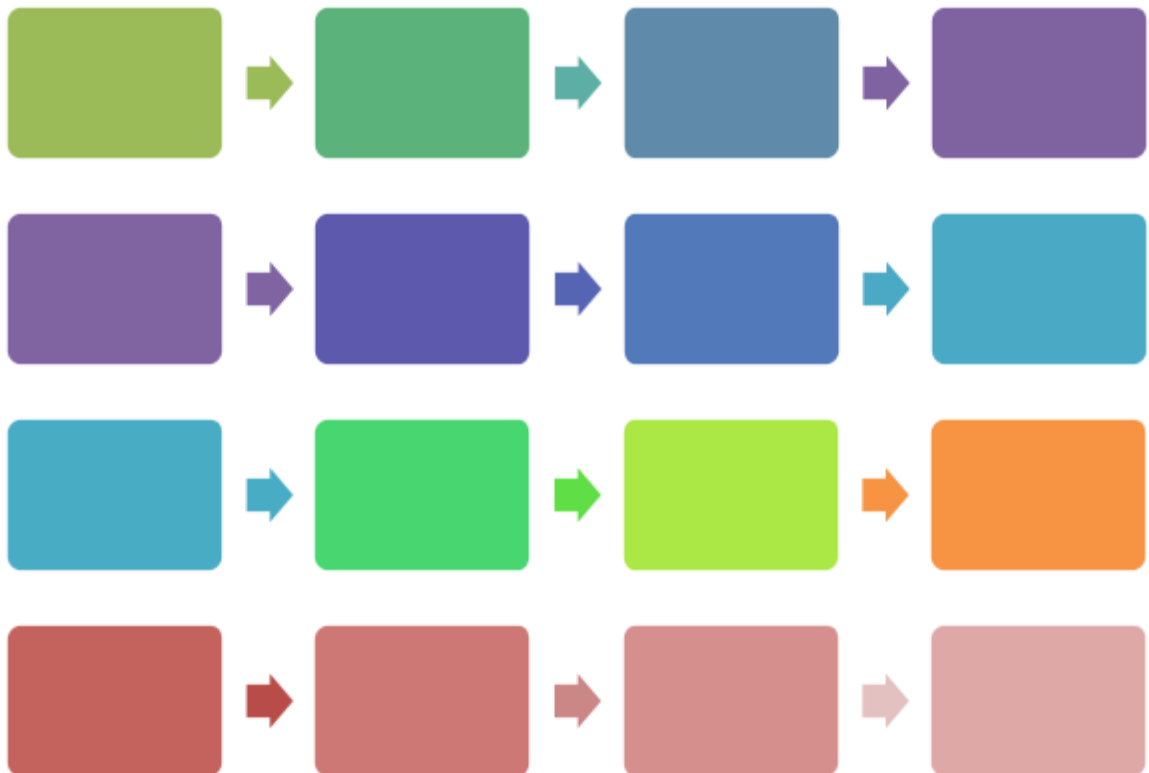
<i>Fracciones</i>	<i>Material concreto</i>	<i>Comprobación numérica</i>	<i>Respuesta</i>
$\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$		$1 \times 10 = 5 \times 2$ $10 = 10$	Si No
$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$			Si No
$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$			Si No
$\frac{3}{2} = \frac{2}{3}$			Si No
$\frac{3}{4} = \frac{8}{12}$			Si No

$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$			<table border="1"> <tr> <td>Si</td><td></td><td>No</td><td></td></tr> </table>	Si		No	
Si		No					
$\frac{3}{7} = \frac{6}{7}$			<table border="1"> <tr> <td>Si</td><td></td><td>No</td><td></td></tr> </table>	Si		No	
Si		No					

Has la amplificación indicada y resuélvelas en tu cuaderno.

$$\frac{1}{2} \text{ por } 3 \text{ —}, \quad \frac{2}{7} \text{ por } 4 \text{ —}, \quad \frac{1}{5} \text{ por } 4 \text{ —}, \quad \frac{2}{9} \text{ por } 2 \text{ —}, \quad \frac{3}{2} \text{ por } 4 \text{ —}$$

En esta actividad debes identificar la fracción que se puede obtener al simplificar la primera fracción dada, escribe ambas fracciones en el cuaderno.



Situación de validación: En dicha situación, los alumnos deben justificar las razones

para convencer a otro, aceptar o rechazar las de cualquier sujeto para cambiar su punto de vista, probando sus afirmaciones; estas controversias son elucidadas progresivamente, construidas, debatidas y convenidas. En cualquier caso, además de intercambiar información, hay que afirmar que lo dicho es cierto en algún sistema determinado o utilizando alguna demostración (Brousseau, 2007).

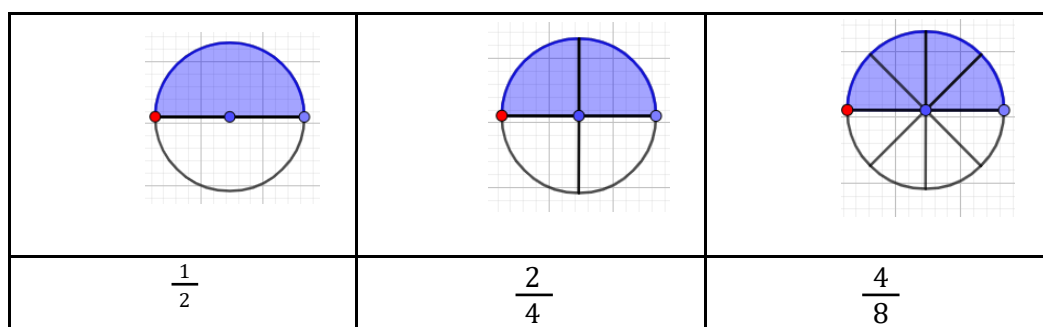
Recuerda, Cuando dos fracciones son equivalentes representan la misma parte de la unidad

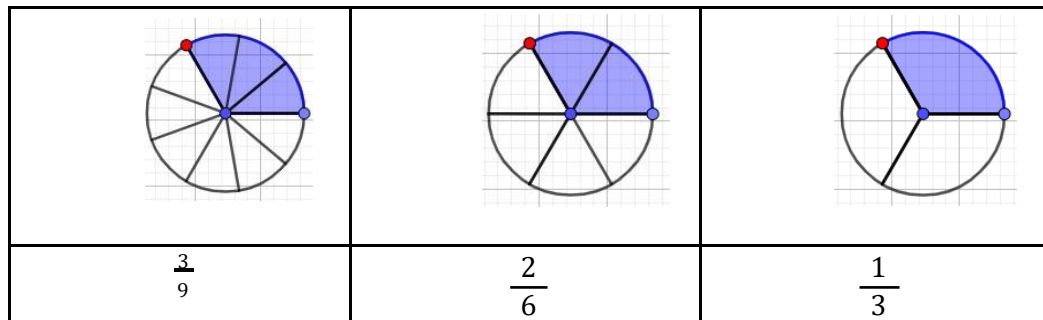
Para identificar rápidamente si dos fracciones son equivalentes se multiplican sus términos en cruz y se debe obtener el mismo resultado; para la obtención de fracciones equivalentes se puede amplificar o simplificar la fracción dada.

Resolución de problemas

Busca la solución de cada una de las situaciones siguientes:

4. *Esteban gastó el sábado $\frac{4}{8}$ de un litro de leche y el domingo $\frac{2}{4}$. ¿Qué día tomó más leche?*
5. *Santiago quiere sembrar maíz en la cuarta parte de su terreno y Juan cultivará tomate en dos octavos del mismo terreno. ¿Cuál de los dos cultivos empleará más terreno?*
6. *¿Explique cómo se usaron la simplificación o amplificación en las siguientes equivalencias?*





7. Escribe el número faltante para que sean fracciones equivalentes

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{\quad} , \quad \frac{1}{4} = \frac{5}{\quad} , \quad \frac{3}{7} = \frac{6}{\quad} , \quad \frac{2}{5} = \frac{\quad}{10} , \quad \frac{1}{2} = \frac{4}{\quad}$$

Situación de Institucionalización.

Corresponde en esta fase retomar las conclusiones finales a las que los alumnos han podido llegar, con el fin de despersonalizarlas, descontextualizarlas y conservarlas como un saber general o que permita ser usado nuevamente como conocimiento previo para otro saber o bien para asimilarlo con otro saber (Brousseau, 2007).

Usando cualquiera de los elementos concretos entregados (discos de fracciones, barras de fracciones, rectas numéricas para fracciones) compara si cada par de fracciones son equivalentes. Verifica multiplicando sus términos en cruz.

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{10}$$

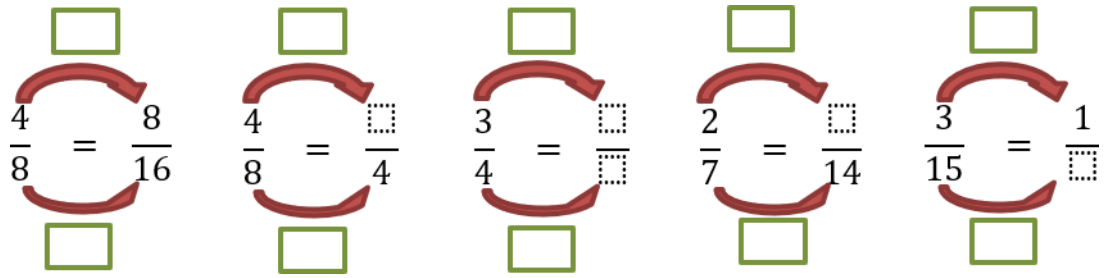
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

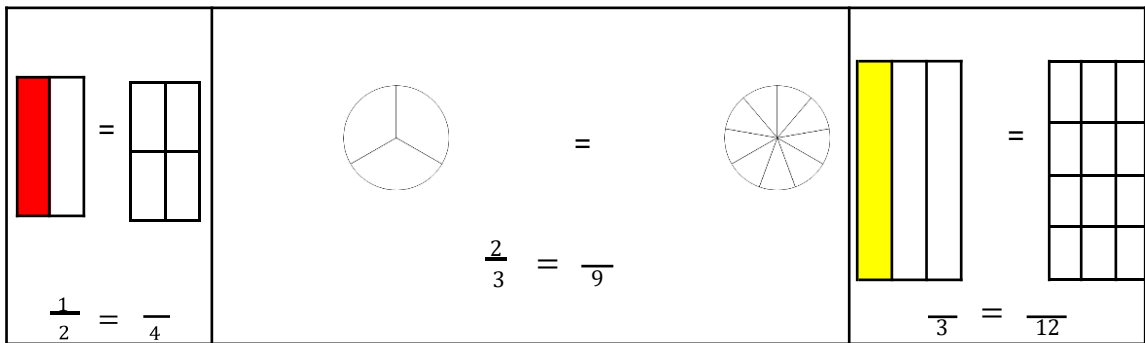
$$\frac{3}{9} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{8}{10} = \frac{4}{7}$$

Encuentra fracciones equivalentes a las fracciones dadas utilizando la amplificación o la simplificación.

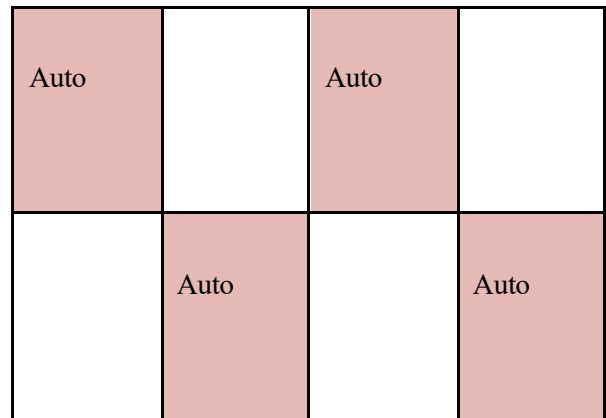
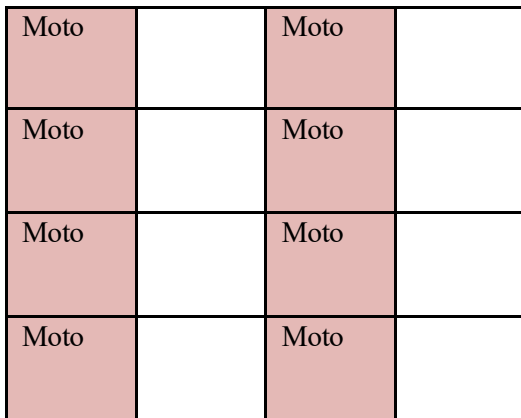


Sombrea las figuras y completa las fracciones para que sean equivalentes.



Los siguientes son los planos de dos bodegas, una de autos y otra de motocicletas.

¿Identifica cuál tiene mayor superficie? Explique.



Obtén 5 fracciones equivalentes a la fracción dada

$$\frac{2}{5} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

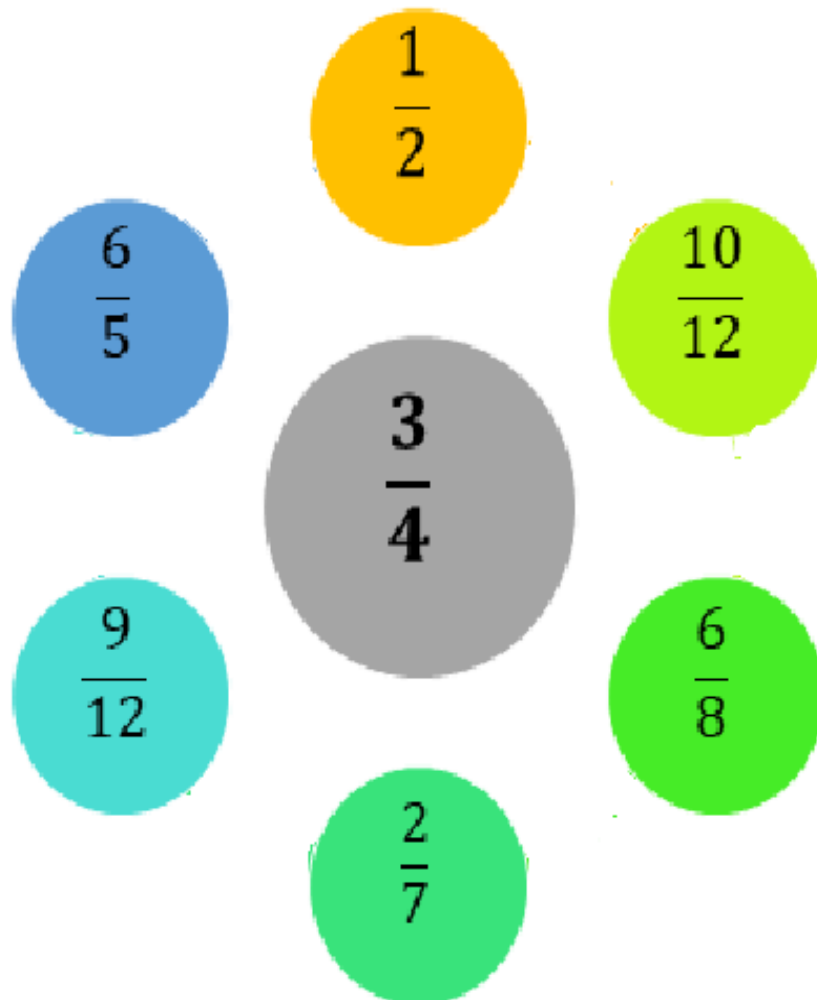
$$\frac{1}{2} = _ = _ = _ = _ = _ = _ = _$$

$$\frac{2}{3} = _ = _ = _ = _ = _ = _ = _$$

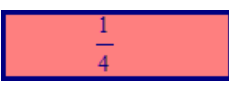
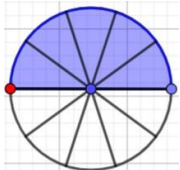
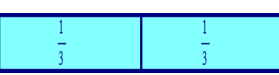
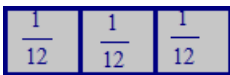
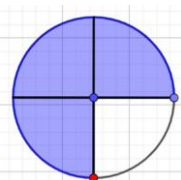
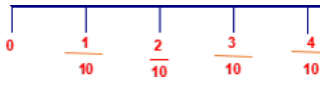
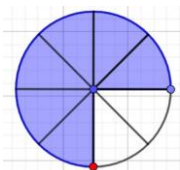
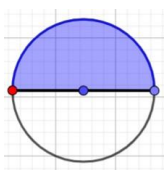
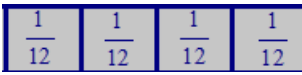
$$\frac{2}{6} = _ = _ = _ = _ = _ = _ = _$$

$$\frac{1}{4} = _ = _ = _ = _ = _ = _ = _$$

Mediante flechas une las fracciones equivalentes con $\frac{3}{4}$



Unir con una flecha la fracción dada con la figura que la representa y con una fracción equivalente

$\frac{1}{4}$		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{2}{5}$		
$\frac{1}{2}$		
$\frac{2}{6}$		
$\frac{3}{4}$		

Fin de la secuencia didáctica

A manera de cierre, la propuesta desarrollada constituye una respuesta directa a las dificultades persistentes que los estudiantes de cuarto grado presentaban en la comprensión de las fracciones, especialmente en equivalencia, representaciones semióticas y relaciones de orden. La implementación de la secuencia didáctica

fundamentada en la Ingeniería Didáctica permitió transformar el enfoque algorítmico tradicional hacia un aprendizaje basado en la exploración, la validación y la institucionalización del conocimiento. Los resultados evidenciaron avances significativos en varias de las competencias trabajadas, lo cual demuestra que el diseño didáctico no solo atiende el problema identificado, sino que genera condiciones favorables para un cambio conceptual más profundo.

.

CONCLUSIONES

El presente apartado tiene como propósito sintetizar los hallazgos más relevantes derivados de la implementación del método de enseñanza de las fracciones basado en la Ingeniería Didáctica en estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa Supía (Caldas, Colombia). Su intención es presentar, de manera articulada, las evidencias que permiten evaluar la efectividad del modelo propuesto y valorar su impacto en los aprendizajes matemáticos, la práctica docente y los procesos pedagógicos institucionales. En coherencia con el enfoque cuantitativo y el diseño cuasi-experimental adoptado, las conclusiones se estructuran a partir del cumplimiento del objetivo general y de los objetivos específicos del estudio, conectando los resultados empíricos con las implicaciones pedagógicas que se desprenden de ellos.

Con relación al objetivo general que consistía en diseñar una propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las fracciones, orientada a favorecer aprendizajes significativos y generar estrategias de mejora pedagógica en los estudiantes de cuarto grado de primaria de la Institución Educativa Supía, Colombia, durante el año 2024, se concluye que la propuesta desarrollada resultó efectiva para promover aprendizajes significativos y consolidar la comprensión conceptual del número fraccionario. Los resultados del Modelo Lineal Generalizado Mixto (MLMG) mostraron mejoras significativas en todas las competencias analizadas, lo que evidencia

que los estudiantes del grupo experimental superaron ampliamente al grupo control en su desempeño global. La propuesta basada en la Ingeniería Didáctica permitió que los estudiantes transitaran de un pensamiento algorítmico y memorístico hacia una comprensión estructural del concepto de fracción, integrando la noción parte-todo, la equivalencia, la comparación y el sentido operatorio, lo que confirma la efectividad del modelo como mediador de aprendizajes profundos y duraderos.

En relación con el objetivo específico 1, orientado a fundamentar teóricamente una propuesta didáctica basada en la Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las fracciones, se concluye que el marco teórico-metodológico seleccionado proporcionó una base sólida para la estructuración del proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de fracción. La articulación de las fases de la Ingeniería Didáctica —análisis preliminar, análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori— permitió sustentar el diseño de una secuencia didáctica coherente con los niveles de razonamiento del pensamiento fraccionario. Asimismo, el sustento en la teoría de las situaciones didácticas favoreció la construcción progresiva de significados matemáticos a partir de la acción, la formulación, la validación y la institucionalización del conocimiento.

Respecto al objetivo específico 2, orientado a analizar la implementación de la propuesta didáctica en grupos experimentales, contrastándola con un grupo control que siguió el método tradicional, los resultados evidencian que la aplicación del enfoque basado en la Ingeniería Didáctica generó efectos significativamente positivos en el aprendizaje de las fracciones. Los grupos experimentales presentaron mejoras sustanciales en todas las competencias evaluadas, destacándose especialmente la equivalencia de fracciones (CR_1) y los cambios de representación gráfico-numérica (CR_2) y numérico-gráfica (CR_3). En contraste, el grupo control mantuvo un aprendizaje predominantemente memorístico y algorítmico, sin mostrar avances equivalentes, lo que confirma la efectividad del enfoque implementado frente a los métodos tradicionales.

En relación con el objetivo específico orientado a elaborar la propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las fracciones, se concluye que el proceso de diseño permitió construir una secuencia didáctica estructurada,

coherente y progresiva. La propuesta integró actividades de equipartición, equivalencia, comparación y conversión entre representaciones gráficas y simbólicas, garantizando la articulación entre lo concreto y lo abstracto. Su organización favoreció el tránsito del estudiante desde procedimientos mecánicos hacia una comprensión estructural del número fraccionario, consolidándose como una propuesta pertinente para el contexto institucional y susceptible de ser replicada en escenarios educativos similares.

Finalmente, en coherencia con el objetivo específico 4, orientado a evaluar el impacto de la propuesta didáctica en el desempeño académico de los estudiantes, se concluye que los análisis estadísticos realizados mediante el Modelo Lineal Generalizado Mixto (MLMG) confirmaron un impacto positivo y estadísticamente significativo del método basado en la Ingeniería Didáctica. Las diferencias entre los grupos fueron evidentes en las seis competencias del pensamiento fraccionario, con mayores avances en la equivalencia, la interpretación gráfica y la conversión entre representaciones. Aunque las competencias relacionadas con relaciones de orden (CR_4), porcentajes (CR_5) y razones (CR_6) presentaron menores niveles de logro, el avance observado frente al grupo control evidencia la capacidad del método para superar progresivamente obstáculos epistemológicos persistentes. Asimismo, el modelo indicó que el efecto del docente no fue significativo, lo que respalda la consistencia y replicabilidad de la propuesta.

RECOMENDACIONES

Desde el punto de vista metodológico.

Desde una perspectiva metodológica, dirigida a investigadores y futuros estudiosos de la didáctica de las matemáticas, se recomienda replicar el diseño cuasi-experimental con grupos control y experimentales, procurando el uso de muestras balanceadas que permitan fortalecer la validez externa de los resultados y realizar análisis comparativos más robustos. Asimismo, se considera pertinente profundizar en el uso de modelos estadísticos avanzados, como el Modelo Lineal Generalizado Mixto (MLMG), dado que este tipo de análisis permite controlar la variabilidad entre grupos y docentes, resultando especialmente útil en contextos escolares heterogéneos. Para futuras investigaciones, se sugiere la conformación de equipos de trabajo interdisciplinarios que incorporen enfoques metodológicos mixtos, combinando técnicas cuantitativas y cualitativas, con el propósito de complementar los resultados estadísticos con el análisis de percepciones docentes y procesos de aprendizaje más profundos. Finalmente, se recomienda avanzar en la validación de nuevos instrumentos de evaluación orientados al análisis del cambio conceptual en fracciones, diseñados a partir de las seis competencias abordadas en esta investigación, con el fin de enriquecer los estudios sobre el pensamiento fraccionario en educación primaria.

Desde el punto de vista académico.

Desde el ámbito académico, dirigido a universidades, programas de formación docente y comunidades académicas, se recomienda que las instituciones educativas y de educación superior con bajos desempeños en matemáticas adopten propuestas pedagógicas sustentadas en teorías didácticas consolidadas, como la Ingeniería Didáctica, que favorecen la comprensión conceptual del conocimiento matemático y superan enfoques centrados en la mecanización de procedimientos. En este sentido, resulta fundamental que los programas de licenciatura en educación y las maestrías en didáctica de las matemáticas fortalezcan la formación docente inicial y continua en teorías didácticas contemporáneas, entre ellas la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau y la teoría de los registros de representación semiótica de Duval, con el propósito de promover prácticas pedagógicas reflexivas, investigativas y contextualizadas. De igual manera, se sugiere que los departamentos de matemáticas de las instituciones educativas incorporen en sus planes de estudio secuencias didácticas estructuradas y validadas empíricamente, como la diseñada en esta investigación, que favorezcan aprendizajes significativos y duraderos en los estudiantes de educación primaria. Finalmente, se recomienda a las facultades de educación y centros de formación docente impulsar investigaciones de intervención didáctica como trabajos de grado o tesis, con énfasis en la resolución de problemáticas reales del aula y en la transformación de las prácticas pedagógicas cotidianas.

Desde el punto de vista práctico

Desde el punto de vista práctico, dirigido a docentes y directivos escolares, se recomienda a los profesores de matemáticas de básica primaria implementar la guía didáctica diseñada en esta investigación como una estrategia concreta para la enseñanza de las fracciones desde una perspectiva significativa, gradual y basada en la experiencia, integrando de manera sistemática materiales concretos, visuales y digitales en las sesiones de clase. A los directivos docentes y coordinadores académicos se sugiere incorporar este tipo de propuestas en los Planes Institucionales de Mejoramiento (PIM) y en los Proyectos Educativos Institucionales (PEI), dado que han sido validadas en contextos reales y ofrecen rutas de acción pedagógica pertinentes para estudiantes de contextos rurales y socialmente vulnerables. Asimismo, se recomienda promover

espacios institucionales de reflexión y socialización docente, tales como comunidades de práctica o círculos pedagógicos, que permitan compartir experiencias de implementación, analizar resultados, realizar adaptaciones y proponer mejoras colectivas fundamentadas en la evidencia empírica. Finalmente, se sugiere ampliar el uso de materiales manipulativos y representaciones visuales en el trabajo cotidiano con fracciones, dado que estos recursos demostraron ser determinantes en los logros alcanzados y facilitan la comprensión conceptual del número racional en los estudiantes de educación primaria.

BIBLIOGRAFÍA

- Aguilar-Terrones, D., Sánchez-Ruiz, J. G., y Salgado-Suárez, G. D. (2022a). Aprendizaje de Números Racionales para una Educación Híbrida. In *Innovación Digital Educativa* (p. 348). SOMECE.
- Aguilar-Terrones, D., Sánchez-Ruiz, J. G., y Salgado-Suárez, G. D. (2022b). Aprendizaje de números racionales a partir de representaciones semióticas. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 14(2 SE-Propuestas didácticas), 69–99.
<https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i2.102>
- Alhrahsh, R., y Almajali, S. (2023). An Experimental Study on Measuring the Impact of Using Virtual Laboratories in Developing Some Metacognition Skills (Planning, Monitoring, and Control) in the Subject of Physics. *International Journal of Educational Research Review*, 8. <https://doi.org/10.24331/ijere.1336619>
- Alva Alejos, M. F., y Solís Esquina, M. (2019). Fortaleciendo los significados de las fracciones a través de las situaciones didácticas. *Investigación e Innovación En Matemática Educativa*, 4(1), 18–40.
<https://revistaiime.org/index.php/IIME/article/view/48/66>
- Andonegui Zabala, M. (2006). Fracciones I. Concepto y representación. In UNESCO (Ed.), *Serie. Desarrollo del pensamiento matemático N° 9* (p. 32). Federación Internacional Fe y Alegría.

- Aravena-Díaz, M. D., Solar Bezmalinovic, H., Cárcamo Mansilla, N., y Cifuentes, M. B. (2025). Metacognición en tareas de modelado matemático con estudiantes de Educación Primaria en Chile. *Revista Colombiana de Educación*, 94 SE-Dossier: *Metacognición parte II*, e19797. <https://doi.org/10.17227/rce.num94-19797>
- Arenas-Peñaloza, J. A., y Rodríguez-Vásquez, F. M. (2021). Enseñanza y aprendizaje del concepto fracción en la educación primaria: estado del arte. *Cultura, Educación y Sociedad*, 12(2), 49–64.
- Arenas Peñaloza, J. A. (2018). *Compresión del concepto de fracción como razón a través del modelo de Pirie y Kieren* [Universidad Autónoma de Guerrero-México]. http://ri.uagro.mx/bitstream/handle/uagro/459/16347050_TM2016.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Arteaga-Martínez, B., Pizarro, N., y Belmonte, J. M. (2022). Una ingeniería didáctica para la enseñanza de unidades temporales en educación primaria: el reloj digital. *Revista Complutense de Educación*, 33(4), 551–563. <https://redined.educacion.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/231544/Ingenieria.pdf?sequence=1>
- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33–60). Universidad de los Andes.
- Artigue, M., Doaudy, R., y Moreno, L. (1995). Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. In P. Gómez (Ed.), *Ingeniería Didáctica en educación Matemática*. https://www.researchgate.net/profile/Pedro-Gomez-11/publication/277733635_Ingenieria_didactica_en_educacion_matematica/links/559e491308ae76bed0bb8948/Ingenieria-didactica-en-educacion-matematica.pdf#page=41
- Ávila, A. (2020). Significados, representaciones y lenguaje: las fracciones en tres generaciones de libros de texto para primaria. *Educación Matemática*, 31(2). <https://doi.org/https://doi.org/10.24844/em3102.02>
- Bachelard, G. (1971). *La Formación del Espíritu Científico* (S. XXI (Ed.); 1st ed.).

- Barragán Alvis, L. O., y Murillo Fandiño, M. A. (2019). Secuencia didáctica para la enseñanza y aprendizaje de los números racionales y resolución de problemas en la Educación Básica Primaria. *Ideales.*, 7, 90–96.
<http://revistas.ut.edu.co/index.php/Ideales/article/view/1360>
- Barroso Moreira, I. M., Pinheiro Wanzeler, E., y Abreu da Silveira, M. R. (2015). Ingeniería Didáctica: operaciones con fracciones para estudiantes sordos y oyentes. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática - CIAEM*, 12.
https://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/1079/441
- Bataller Soler, D. (2019). *Contribución del currículo de Educación Plástica, Visual y audiovisual al rendimiento académico en Matemáticas* [Universidad de Alicante].
<http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/102210>
- Behr, M., Harel, G., Post, T., y Lesh, R. (1994). Unidades de cantidad: Una base conceptual común a las estructuras aditivas y multiplicativas. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *El desarrollo del razonamiento multiplicativo en el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 121–176). Albany, NY: State University of New York Press.
- Benítez Mojica, D., Yaker Agudelo, H., y Taquez, H. A. (Eds.). (2021). *Experiencias significativas en educación matemática*. Universidad ICESI.
<https://doi.org/https://doi.org/10.18046/EUI/disc.4.2021>
- Bisquerra Alzina, R. (1998). *Modelos de Orientación e Intervención psicopedagógica*. (B. E. Praxis. (Ed.)).
- Block Sevilla, D. (2021). Los saltos de las ranas. Estudio de una secuencia didáctica de proporcionalidad, con problemas de comparación de razones, en quinto grado de primaria. *Educación Matemática*, 33(2), 114–146.
<https://doi.org/https://doi.org/10.24844/em3302.05>
- Block Sevilla, D., Ramos Banda, D., y Sosa, J. J. (2024). De la expresión de la razón con dos números naturales, a su expresión con una fracción. Dos experiencias de ingeniería didáctica en el nivel básico. *Educación Matemática*, 53(3).
<https://doi.org/https://doi.org/10.24844/em3503.03>

- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* (1ª ed.). Libros del Sorzal.
http://www.udesantiagovirtual.cl/moodle2/pluginfile.php?file=%2F204043%2Fmod_resource%2Fcontent%2F2%2F287885313-Guy-Brousseau-Iniciacion-al-estudio-de-la-teoria-de-las-situaciones-didacticas-pdf.pdf
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield: Eds. and Trans.). Dordrecht: Kluwer.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970–1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield (Eds.)). <https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2>
- Cano Fernández, F. F. (2014). *Unidad didáctica para la enseñanza de los fraccionarios en el grado cuarto de básica primaria. Estudio de caso: Institución Educativa Supía* [Universidad Nacional de Colombia].
https://www.lareferencia.info/vufind/Record/CO_b09b6d15a49ca53671803a5c33ddb788/Core
- Capilla, R. M. (2016). Habilidades cognitivas y aprendizaje significativo de la adición y sustracción de fracciones comunes. *Cuadernos De Investigación Educativa*, 7(2), 49–62. <https://doi.org/https://doi.org/10.18861/cied.2016.7.2.2610>
- Carmona-Ramírez, L. H., y Henao-Céspedes, V. (2021). Desarrollo de un Modelo de Aprendizaje de Superficies Cuadricas con Realidad Aumentada e Ingeniería Didáctica. *Revista Internacional de Tecnologías Móviles Interactivas (IJIM)*, 15(22), 142–153. <https://doi.org/https://doi.org/10.3991/ijim.v15i22.25341>
- Castro-Rodríguez, E., y Rico, L. (2017). Conocimiento didáctico, enseñanza de fracciones y formación inicial de maestros. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo, & J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 197–2016).
- Castro-Rodríguez, E., y Rico, L. (2021). Conocimiento sobre fracciones de docentes de primaria en formación. *Uniciencia*, 35(2).
<https://doi.org/https://doi.org/10.15359/ru.35-2.10>

- Castro Forero, L., Hernández Tobar, D., y Padilla, J. E. (2010). *Una mirada de los obstáculos epistemológicos desde Gastón Bachelard* [Universidad Militar Nueva Granada].
<https://repository.unimilitar.edu.co/bitstream/handle/10654/5008/CastroForeroLia2010.pdf?sequence=2&isAllowed=y>
- Charalambous, C. Y., y Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a Theoretical Model to Study Students' Understandings of Fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64(3), 293–316. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9036-2>
- Chávez Salazar, A. (2017). *Estado del arte de ingenierías didácticas: fracciones* [Universidad Autónoma de Baja California-México].
<https://repositorioinstitucional.uabc.mx/bitstream/20.500.12930/442/1/ENS087433.pdf>
- Chevallard, Y. (1998). *La Transposición Didáctica. Del saber Sabio al saber Enseñado* (AIQUE (Ed.); 3ª ed.).
https://www.terras.edu.ar/biblioteca/11/11DID_Chevallard_Unidad_3.pdf
- Constitución Política de Colombia, Ley Pública. No. 51818–5 (1991).
<http://www.secretariassenado.gov.co/index.php/constitucion-politica>
- Cortina, J. L. (2014). Investigar las fracciones: experiencias inspiradas en la metodología de los experimentos de diseño. *Educación Matemática*, 270–287.
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854014>
- Cubillo, V., y Ortega, T. (2003). Análisis de un modelo didáctico para la enseñanza/aprendizaje del orden de las fracciones. *Educación Matemática*, 15(2), 55–75. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40515203>
- D'Esclaibes, N., y D'Esclaibes, S. (n.d.). *El método Montessori para Dummies*.
https://static0planetadelibroscommx.cdnstatics.com/libros_contenido_extra/43/42399_El_metodo_Montessori_para_Dummies.pdf
- Díaz, J. (2006). *Influencia de la metodología “ingeniería didáctica matemática” en el aprendizaje de los números fraccionarios de los alumnos de 7º grado de la unidad educativa José Antonio Ramos Sucre* [Universidad de Oriente-Venezuela].

[http://201.249.180.234/bitstream/123456789/3650/2/POSTGRADO en educacion con menciones.pdf](http://201.249.180.234/bitstream/123456789/3650/2/POSTGRADO%20en%20educacion%20con%20menciones.pdf)

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1/2), 103–131.
<http://www.jstor.org/stable/25472062>

Duval, R. (2012). Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica. In U. Malaspina (Ed.), *Enseñanza de las matemáticas. VI Coloquio Internacional* (pp. 14–17). Pontificia Universidad Católica del Perú.
https://repositorio.pucp.edu.pe/index/bitstream/handle/123456789/110937/Resumen_coloquio_2012.pdf?sequence=1#page=31

EduTEKA. (2010). *Informe PISA 2009*. <https://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/Pisa2009.pdf>

Escolano Vizcarra, R., y Gairín Sallán, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *UNION-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 1, 17–35.

Español González, R. (2016). Consideraciones sobre la didáctica de las fracciones a través de la mirada de R. Siegler. In *Máster en Formación de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato 2016-2017*. Universidad Autónoma de Madrid.

Esparza-Rodríguez, E. (2002). Conocimiento especializado de Matemáticas que profesores ponen en juego en la experimentación de una Ingeniería Didáctica. In *Conocimientos, abstracciones y experiencias de la educación en México, una mirada desde la creación y la formación educativa* (1st ed.). Astra Ediciones S. A. de C. V.

Esparza-Rodríguez, E., y Lizarde-Flores, E. (2021). MTSK en la apropiación de una ingeniería didáctica aplicada sobre problemas multiplicativos de fracciones. *V Congreso Iberoamericano Sobre Conocimiento Especializado Del Profesor de Matemáticas*, 12. <https://cdn.congresse.me/uionh1xjq2y29vm9dzo0ctcv9yx>

Fandiño, M. (2009). *Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos*. Editorial

Magisterio.

Fazio, L., y Siegler, R. (2011a). Enseñanza de las fracciones. *Series Prácticas Educativas-22*.
http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user_upload/Publications/Educational_Practices/EdPractices_22s.pdf

Fazio, L., y Siegler, R. (2011b). *Teaching fractions; Educational practices series; Vol.:22; 2011 [Spanish version]*. <http://www.iaoed.org>

Fernández-Bravo, J. A. (s.f.). *Matemática con regletas. Los números en color*.
[http://www.grupomayeutica.com/documentos/1.Los Numeros en Color de Cuisenaire.pdf](http://www.grupomayeutica.com/documentos/1.Los%20Numeros%20en%20Color%20de%20Cuisenaire.pdf)

Freudenthal, H. (1983a). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*.

Freudenthal, H. (1983b). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* (R. Dordrecht (Ed.); 1st ed.). Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001.

Galindo-Domínguez, H. (2020). *Estadística para no estadísticos* (S. L. Editorial Área de Innovación y Desarrollo (Ed.); 1ª ed.).
<https://doi.org/https://doi.org/10.17993/EcoOrgyCso.2020.59>

González Tovar, N. R., y Block Sevilla, D. (2005). La división de una fracción entre un número natural: análisis de una experiencia didáctica. *Educación Matemática*, 17(2), 59–88. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40517204>

Hart, K. (1980). *Fractions* (p. 3). Chelsea College.
https://www.m-a.org.uk/resources/Vol-10-No2_Mar_1981_Fractions.pdf

Hart, K. (1981). *Fractions: Children's Understanding of Mathematics*. (J. Murray (Ed.)).

Hattie, J. (2009). *Aprendizaje visible Una síntesis de más de 800 metaanálisis relacionados con el rendimiento* (Taylor & Francis (Ed.); 1st ed.).
<https://www.book2look.com/embed/9781134024117>

Hernández-Sampieri, R., y Mendoza Torres, C. P. (2018). *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta* (Mc Graw Hill (Ed.)).

978-1-4562-6096-5%0D

- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (McGrawHill. (Ed.)).
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la Investigación* (5ª ed.). MacGraw Hill.
- Herreros-Torres, D., Sanz, M. T., y Gómez-Ferragud, C. B. (2022). Dificultades con la Fracción como Operador en Discentes de Sexto Curso de Educación Primaria. *Bolema, Rio Claro*, 36(73), 728–752. <https://doi.org/DOI:>
<http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a06>
- Higuera Tinoco, D. (2022). *El Aprendizaje del tema de fracciones en alumnos de sexto grado de primaria*. Universidad Autónoma del estado de Hidalgo-México.
- Joya Vega, A., Gamboa Sulvara, J., Castaño León, J., Ortiz Wilches, L., Manzano Arenas, L., Acosta de Guerrero, M. y Sabogal Reyes, Y. (2016). *Proyecto primaria SABERES Saber hacer Matemáticas 4* (1st ed.). Editorial Santillana.
- Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. . Lesh & D. . Bradbard (Eds.), *Number and measurement, Papers from a research workshop* (pp. 101–144). ERIC (ED120027)
- Kieren, T. E. (1980). *Recent research on number learning* (O. S. U. Ohio: Information Reference Center (Ed.)). Ohio: Information Reference Center, Ohio State University.
- Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Numbers concepts and operations in the middle grades* (pp. 162–181).
- Lamon, S. J. (2012). *¡MÁS! Enseñando fracciones y proporciones para comprender* (3rd ed.). Nueva York: Routledge.
<https://doi.org/https://doi.org/10.4324/9780203803196>
- León Robles, G. (2011). *Unidad didáctica: fracciones* [Universidad de Granada].
https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Gloria_Leon.pdf

Ley General de Educación, (1994).

https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

Llinares, S., y Sánchez, V. (1998). Aprender a Enseñar, modos de representación y Número racional. *I Simposio de La Sociedad Española de Investigación En Educación Matemática.*, 13–24.

<https://redined.educacion.gob.es/xmlui/handle/11162/47866>

Llinares, S., Sánchez, V., y García, M. (1994). Conocimiento de contenido pedagógico del profesor. Tareas y modos de representación para las fracción. *Revista de Educación*, 304, 199–225.

Lupiañez, J. (2010). *El análisis didáctico como herramienta para el análisis de textos de matemáticas.*

https://www.researchgate.net/publication/279406639_El_analisis_didactico_como_herramienta_para_el_analisis_de_textos_de_matematicas

Manuel-Capilla, R. (2016). Habilidades cognitivas y aprendizaje significativo de la adición y sustracción de fracciones comunes. *Cuadernos de Investigación Educativa*, 7(2), <https://doi.org/10.18861/cied.2016.7.2.2610>.

Martínez-Moreno, C., Sánchez-Bravo, M., Marulanda-Patiño, A., y Aristizábal-Zapata, H. (2022). Estudio exploratorio sobre la identificación de fracciones usando material tangible con niños y niñas de cuarto grado. *Revista de Investigación de La Universidad Del Quindío*, 34, 22–28.

MEN. (2016). *Con Todos a aprender 2.0 estamos cambiando el país: Sandra Sánchez, formadora del Programa.*

<https://www.mineduacion.gov.co/portal/salaprensa/Comunicados/360236:Con-Todos-a-aprender-2-0-estamos-cambiando-el-pais-Sandra-Sanchez-formadora-del-Programa>

MEN. (2017). *Vamos a Aprender Matemáticas Guía del Docente 4.*

Mendoza, T., y Block, D. (2010). El porcentaje: lugar de encuentro de las razones, fracciones y decimales en las matemáticas escolares. *RELIME*, 13(177–190).

- Millán-Gasca, A. (2017). Zoel García de Galdeano y las matemáticas para niños hacia 1900. *La Gaceta de La RSME*, 20(3), 611–634.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares*. Resolución 2343, (1996).
https://repository.usta.edu.co/bitstream/handle/11634/280/RESOLUCION_2343_DE_JUNIO_5_DE_1996.pdf?sequence=21&isAllowed=y
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en Matemáticas*.
- Ministerio de Educación Nacional. (2015). *Derechos básicos de Aprendizaje. Matemáticas V.2*.
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Programa Todos a Aprender 2.0* (p. 39).
https://www.mineduacion.gov.co/1759/articles-356180_recurso_17.pdf
- Ministerio de Educación Nacional. (2021). *Informe de resultados históricos prueba Saber*. Evaluación.
<https://www.mineduacion.gov.co/portal/micrositios-preescolar-basica-y-media/Evaluacion/Consultas/400767:Informe-de-resultados-historicos-prueba-Saber>
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2017). *Qué es la prueba PISA*.
<https://www.mineduacion.gov.co/portal/micrositios-preescolar-basica-y-media/PISA/Generalidades/363487:Que-es-la-prueba-PISA>
- Molina Muñoz, L. J. (2019). Enseñanza de la fracción parte- todo, desde la resolución de problemas. *Educación y Ciencia*, 23, 589–604.
<https://doi.org/https://doi.org/10.19053/0120-7105.eyc.2019.23.e10274>
- Morales-García, C. (2021). *Suma de fracciones con el uso de las TIC*. Acervo Digital Educativo-Gobierno del estado de México.
<https://ade.edugem.gob.mx/handle/acervodigitaledu/61747>
- Moreno Cadavid, J., Piedrahita Ospina, A. A., y Bez Rosecler, M. (2016). El papel del juego digital y la competencia en el aprendizaje de las matemáticas: experiencia conjunta en escuelas primarias de Colombia y Brasil. *Revista electrónica de*

investigación en educación en ciencias, 11(2).

<http://www.scielo.org.ar/pdf/reiec/v11n2/v11n2a04.pdf>

National Council of Teachers of Mathematics. (2007). *The Learning of Mathematics*, 69th Yearbook (1st ed.).

<https://www.amazon.com.au/Learning-Mathematics-W-Gary-Martin/dp/0873535960>

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part II—problem-structure at successive stages; problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics*, 11(3), 331–363. <https://doi.org/10.1007/BF00697744>

Norton, S. J. (2005). The construction of proportional reasoning. In Queensland University of Technology (Ed.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 4–17). <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED496940.pdf>

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA*, 8(2), 157–182. <http://funes.uniandes.edu.co/1521/>

OCDE. (2023). *OCDE*. <https://www.oecd.org/>

Oviedo, H. C., y Campo-Arias, A. (2005). Aproximación al uso del coeficiente alfa de Cronbach. *Revista Colombiana de Psiquiatría*, XXXIV(4), 572–580.

Páez Olaya, B. (2022). *Diseño de cartilla didáctica para la comprensión de la interpretación del concepto de fracción en estudiantes de grado cuarto de primaria*. [Universidad Nacional de Colombia.]. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/82359>

Parra-Cortés, D. M., y Carmona-Ramírez, L. H. (2021). Implementación de un método gráfico para la enseñanza de las fracciones. *Números: Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, 109, 111–127. <https://redined.educacion.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/219847/Parra.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

- Pedersen, P. (2021). *Aprender y comprender la complejidad de las fracciones*. Aa [lborg Universitetsforlag]. <https://doi.org/https://doi.org/10.54337/aau441584586>
- Pirie, S. E. B., y Kieren, T. E. (1994). Beyond Metaphor: Formalising in Mathematical Understanding within Constructivist Environments. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 39–43. <http://www.jstor.org/stable/40248102>
- Post, T., y Cramer, K. A. (1987). Children's strategies in ordering rational numbers. *Arithmetic Teacher*, 33–37.
<https://experts.umn.edu/en/publications/childrens-strategies-in-ordering-rational-numbers>
- Pruzzo de Di Pego, V. (2012). Las fracciones: ¿problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza? *Pilquen. Sección Psicopedagogía*, 8, 1–14.
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4059230>
- Puga Peña, L. A., Rodríguez Orozco, J. M., y Toledo Delgado, A. M. (2016). Reflexiones sobre el lenguaje matemático y su incidencia en el aprendizaje significativo. *Sophia*, 20. [https://doi.org/DOI: 10.17163/soph.n20.2016.09](https://doi.org/DOI:10.17163/soph.n20.2016.09)
- Quintanilla Batallanos, V., y Gallardo Romero, J. (2021). Obstáculos en la comprensión de la fracción como medida: Una mirada hermenéutica. *Revista de Historia de Educación Matemática*.
<http://funes.uniandes.edu.co/29449/1/Quintanilla2021Obstáculos.pdf>
- Reinhold, F., Hoch, S., Werner, B., Richter-Gebert, J., y Reiss, K. (2020). Learning fractions with and without educational technology: What matters for high-achieving and low-achieving students? *Learning and Instruction*, 65, 101264.
<https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2019.101264>
- Rico Romero, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Unión - revista iberoamericana de educación matemática*, 9(33 SE-Firma Invitada).
<https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/801>
- Ríos García, Y. (2007). Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones. *Omnia*, 13(2), 120–157. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=73713207>

- Ríos García, Y. (2009a). Competencias conceptuales adquiridas durante la aplicación de una propuesta didáctica referidas a las fracciones. *Omnia*, 15(2), 56–75.
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=73711658005>
- Ríos García, Y. (2009b). Competencias procedimentales adquiridas durante la aplicación de situaciones didácticas referidas a las fracciones. *Telos*, 11(3), 310–331.
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=99312516003>
- Santiago Benítez, G., Caballero Álvarez, R., Gómez Mayén, D., y Cuevas, Domínguez, A. (2013). El uso didáctico de las TIC en escuelas de educación básica en México. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, XLIII(3), 99–131.
- Sanz, M., Figueras, O., y Gómez, B. (2018). Las fracciones, habilidades de alumnos de 15 a 16 años. *Revista De Educación De La Universidad De Granada*, 25, 257–279.
<https://doi.org/https://revistaseug.ugr.es/index.php/reugra/article/view/16607#:~:text=%2C%20257%2D279.-,https%3A//doi.org/10.30827/reugra.v25i0.125,-Formatos%20de%20citaci%C3%B3n>
- Socas, M. (2011). Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria. Buenas Prácticas. *Educatio Siglo XXI*, 29(2), 199–224.
<https://revistas.um.es/educatio/article/view/133031>
- Solarte Castillo, W. (2018). *La comprensión del concepto de fracción como relación parte-todo con el apoyo de recursos educativos digitales abiertos y material concreto* [Universidad del Cauca].
<http://repositorio.unicauca.edu.co:8080/bitstream/handle/123456789/1082/la-comprensi3n-del-concepto-de-fracci3n-como-relaci3n-parte-todo.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Sousa, V., Driessnack, M., & Costa Mendes, I. A. (2007). Revisión de diseños de investigación resaltantes para enfermería. parte 1: diseños de investigación cuantitativa. *Rev Latino-Am Enfermagem*, 15(3),
<https://www.scielo.br/j/rlae/a/7zMf8XypC67vGPrXVrV>.
- Talero Pinto, L. F. (2020). *Algunas dificultades en el reconocimiento y uso de los atributos propios de la fracción como parte-todo en contexto continuo. El caso de*

- un grupo de estudiantes de grado cuarto* [Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. <https://acortar.link/7W6pEt>
- Tapia Fuentes, J. E., y Rivas Córdoba, S. E. (2016). *La Adición de Fracciones. Un estudio desde el Análisis Didáctico* [Universidad de Valparaíso-Chile]. [http://repositoriobibliotecas.uv.cl/bitstream/handle/uvsc1/5819/La adición de fracciones%2C un estudio desde el análisis didáctico.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://repositoriobibliotecas.uv.cl/bitstream/handle/uvsc1/5819/La%20adici%C3%B3n%20de%20fracciones%20un%20estudio%20desde%20el%20an%C3%A1lisis%20did%C3%A1ctico.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Tobón, S. (2017). *Evaluación Formativa. Estrategias e Instrumentos* (Mount Dora & Kresearch (Eds.)).
- Vanegas, G. (2023, December 5). Pruebas PISA: Colombia cae en matemáticas, lectura y ciencia. *El País*. <https://elpais.com/america-colombia/2023-12-05/colombia-pierde-puntaje-en-las-pruebas-pisa-de-2022-menos-que-el-promedio-de-la-ocde.html>
- Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 10(2), 133–170. <https://www.ecosad.org/laboratorio-virtual/images/biblioteca-virtual/bibliografiagc/teoria-de-campos-conceptuales-vergnaud-1990.pdf>
- Villegas Rodríguez, M. (1997). *Matemática Nova 4*. Editorial Voluntad.
- Vorhölter, K. (2025). Metacognitive behaviour when working on modelling problems in small groups. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s11858-025-01661-8>
- Wilhelmi, M. R. (2009). Didáctica de las Matemáticas para profesores. Las fracciones: un caso práctico. *IV Coloquio Internacional Sobre Enseñanza de Las Matemáticas*. <http://funes.uniandes.edu.co/17038/>
- Zhang, Y., Wu, X., Chen, S., Cui, C., He, Y., y Wang, L. (2024). Differential effects of private tutoring on groups of students' mathematics achievements: a longitudinal study. *Educational Studies in Mathematics*, 115(2), 197–222. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10282-5>

Zimmerman, B. J. (2002). Becoming a Self-Regulated Learner: An Overview. *Theory Into Practice*, 41(2), 64–70. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4102_2

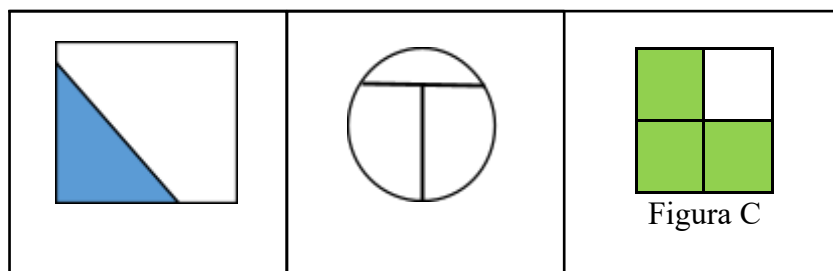
ANEXOS

Anexo 1. Prueba Pretest – Postest

Este instrumento se utilizó como herramienta diagnóstica y prueba final para la recolección de la información



1. Observa las figuras e identifica con una X la que representa una fracción:



2. Representa numéricamente las fracciones: un medio, dos tercios y cuatro quintos.

_____, _____, _____

3. Representa gráficamente las siguientes fracciones:

$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$
---------------	---------------	---------------

4. Escribe la fracción que está representada en la parte sombreada de la siguiente figura:

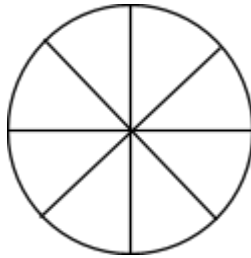


5. Encierra en un círculo el número fraccionario que está representado por la parte sombreada de la figura:

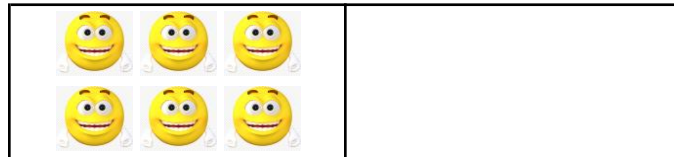
a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{1}{4}$



6. En la siguiente figura, sombrea la cantidad que representaría $\frac{5}{8}$



7. Señala la cantidad de emoticones que representa $\frac{1}{3}$ de la siguiente imagen



8. En las siguientes afirmaciones señala si son verdaderas o falsas:

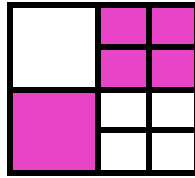
☐ V ☐ F

☐ V ☐ F

a) Es $\frac{1}{2}$ lo mismo que la mitad

b) Es $\frac{1}{3}$ lo mismo que la tercera parte

9. Determina si las siguientes representaciones de fracciones sombreadas son iguales o diferentes


☐ Iguales

☐ Diferentes

10. Define si los siguientes fraccionarios son equivalentes o diferentes

$$\frac{1}{2} \quad y \quad \frac{4}{8}$$

☐ Iguales

☐ diferentes

11. Si te ofrecen las siguientes porciones de pizza determina cual es la más grande

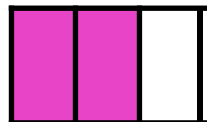
a) $\frac{1}{2}$ de pizza

b) $\frac{3}{4}$ de pizza

12. Realiza el siguiente apareamiento entre la parte sombreada de cada figura y el número fraccionario que la representa:



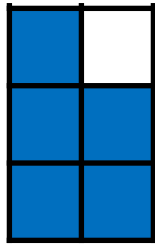
$$\frac{5}{6}$$



$$\frac{1}{2}$$

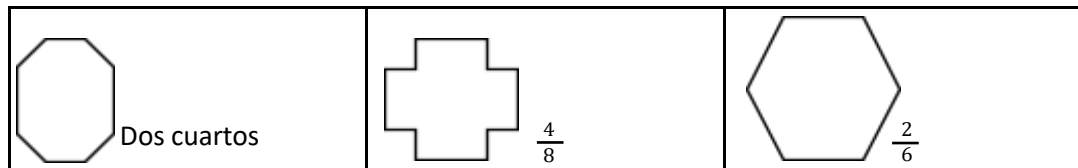


$$\frac{1}{4}$$



$$\frac{2}{3}$$

13. En cada figura usando líneas debes fraccionarla y sombrear la fracción indicada:



14. En una tienda de deportes te encuentras con el siguiente aviso



Hoy, todos los balones con el 50% de descuento. Si el balón de basquetbol tiene un precio de \$60.000 pesos. ¿Cuánto debes pagar con el descuento?
\$ _____ pesos.

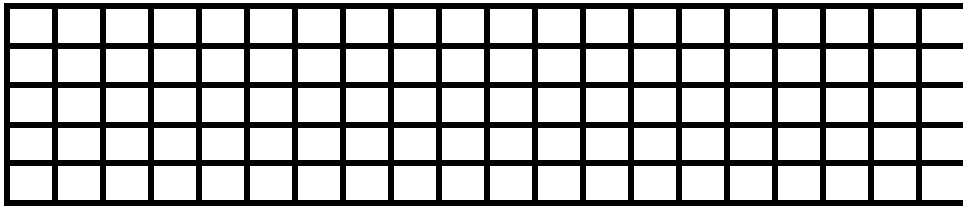
15. Si la cuarta parte de un campo de cultivo se usa para la siembra de frijol, ¿qué porcentaje del campo de cultivo se usa en la siembra de frijol?

- a) 25 %
- b) 40 %

- c) 50 %
d) 75 %

16. Si el total de alumnos del grado Sexto de la Institución Educativa Supía es de 36 alumnos de los cuales $\frac{2}{3}$ son niñas, el número de niñas es: _____

17. Sombrea las partes necesarias para representar la fracción decimal $\frac{31}{100}$



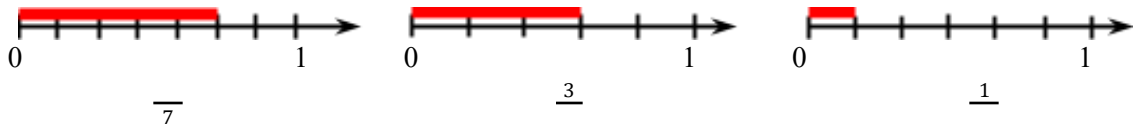
18. Ordena de menor a mayor los siguientes fraccionarios:

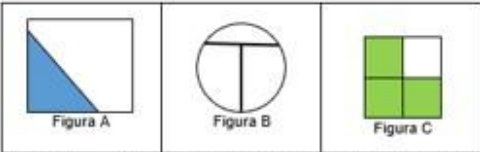
$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{2}{3} \qquad _ < _ < _$$

19. Ordena de mayor a menor los siguientes fraccionarios:

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{2} \qquad _ > _ > _$$

20. Completa la fracción representada en cada semirrecta:



Ítems		Criterios a Evaluar									
		Claridad en la redacción		Pertinencia		Inducción a la respuesta		Lenguaje adecuado con el nivel del informante		Mide lo que pretende (validez)	
1. Observa las figuras e identifica con una X la que representa una fracción:		SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
		Observaciones									
		La pregunta es válida frente a lo que busca el objeto de estudio, está bien redactada y las tres figuras muestran claramente las opciones al estudiante induciéndolo a validar su conocimiento sobre fracciones; está bien redactada es pertinente, totalmente válida en el estudio, el lenguaje es adecuado para la población de estudio.									
2. Representa numéricamente las fracciones un medio, dos tercios y cuatro quintos.		SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
		Observaciones									
		La <u>intención</u> de la pregunta es muy buena, para mejorar la pregunta es redacción y lenguaje, yo sugiero escribir además una idea que le indique al niño que lo que se quiere es que registre en formato numérico de números fraccionarios las expresiones que están entre comillas y que se coloquen las palabras que representan a numeradores de un color y las palabras que son denominadores de otro color, <u>ejm</u> : "un medio", "dos tercios" y "cuatro quintos".									

Anexo 3. Consentimiento informado para participar de manera voluntaria docentes.

Instrumento empleado para generar el consentimiento informado por parte de los participantes en la investigación.



CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PARTICIPAR DE MANERA VOLUNTARIA EN UN ESTUDIO DE INVESTIGACIÓN

Título del proyecto: Efecto de una propuesta de enseñanza con ingeniería didáctica sobre el aprendizaje de las fracciones en estudiantes de cuarto grado de educación primaria

Responsable: Freidel Francisco Cano Fernández

Sede del estudio: Universidad de Investigación e Innovación de México (UIIX).

Institución Educativa: Supía

Docente participante: Bernardo de la Cruz Hoyos Alcalde

C.C.: 15.917.324

Yo, Bernardo de la Cruz Hoyos Alcalde, mayor de edad, identificado con Cédula de Ciudadanía No. 15.917.324, he sido informado acerca del Proyecto de investigación: “Efecto de una propuesta de enseñanza con ingeniería didáctica sobre el aprendizaje de las fracciones en estudiantes de cuarto grado de educación primaria”, el cual requiere la participación de Freidel Francisco Cano Fernández como docente investigador, aplicando los diferentes instrumentos requeridos en su proyecto.

Después de recibir la información sobre las condiciones de mi participación, manifiesto haber resuelto todas mis inquietudes y comprendido en su totalidad el contenido de este consentimiento, entendiendo que:

- Mi participación en esta investigación no tendrá repercusiones o consecuencias negativas en mi vida laboral ni personal.
- La participación no generará ningún gasto, ni recibiré remuneración alguna por mi

colaboración.

- No habrá ningún tipo de intimidación en caso de que decida no autorizar mi participación.
- Mi identidad no será publicada; las imágenes y sonidos registrados serán utilizados únicamente con fines académicos y de investigación.
- Universidad de Investigación e Innovación de México (UIIX). el investigador responsable, Freidel Francisco Cano Fernández, se comprometen a garantizar la protección del material recolectado y su uso exclusivo para fines académicos, de acuerdo con la normativa vigente, manteniendo estricta confidencialidad de la información.

Firma del participante: Bernardo de La Cruz Hoyos A.

Fecha: _____

Firma del investigador responsable: _____

Freidel Francisco Cano Fernández

Anexo 4. Consentimiento informado para participar en la investigación padres o acudientes,

Instrumento empleado para generar el consentimiento informado por parte de los participantes en la investigación.



CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PARTICIPAR DE MANERA VOLUNTARIA EN UN ESTUDIO DE INVESTIGACIÓN

Título del proyecto: Efecto de una propuesta de enseñanza con ingeniería didáctica sobre el aprendizaje de las fracciones en estudiantes de cuarto grado de educación primaria

Responsable: Freidel Francisco Cano Fernández

Sede del estudio: Universidad de Investigación e Innovación de México (UIIX).

Institución Educativa: Supía

Nombre del participante: Emanuel Arredondo Escalante

Se está invitando a su hijo(a) a participar en un estudio de investigación científica.

Luego de haber sido informado sobre las condiciones de la participación de mi hijo(a), resuelvo todas las inquietudes y comprendo en su totalidad la información sobre esta actividad, entendiendo que:

- La participación de mi hijo(a) en esta investigación no tendrá repercusiones o consecuencias en su vida académica, ni personal.
- La participación no generará ningún gasto, ni recibirá remuneración alguna por su colaboración.
- No habrá ningún tipo de intimidación en caso de que no autorice su participación.
- Su identidad no será publicada; las imágenes y sonidos registrados se utilizarán únicamente con fines académicos y de investigación.

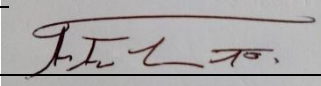
- La Universidad de Investigación e Innovación de México (UIIX), y el investigador responsable, Freidel Francisco Cano Fernández, garantizarán la protección del material recolectado como insumo de esta investigación y su uso se limitará estrictamente a los propósitos académicos previstos, de acuerdo con la normativa vigente.

Atendiendo a lo manifestado y comprendido sobre consentimiento informado, doy de forma consciente y voluntaria:

[X] DOY EL CONSENTIMIENTO [] NO DOY EL CONSENTIMIENTO

Firma del participante: Yeni Fer Escalante

Fecha: _____

Firma del investigador responsable: 

Anexo 5. Rúbricas de la evaluación para la validez de la propuesta de transformación.

Rúbrica empleada para que los expertos validaran la propuesta de transformación y verificar la consistencia interna de dicho instrumento, por cada uno de los expertos evaluadores.



Rúbrica para evaluar la propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las fracciones

Estimado(a) evaluador(a):

El presente instrumento tiene como finalidad validar la propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las fracciones en estudiantes de cuarto grado de primaria. Su valoración es fundamental para garantizar la pertinencia, coherencia, aplicabilidad, innovación y factibilidad de la propuesta en contextos educativos reales.

La rúbrica está organizada en cinco criterios. Cada uno debe calificarse en una escala de 1 (muy bajo) a 5 (muy alto), según el nivel de cumplimiento observado. Adicionalmente, se solicita consignar observaciones cualitativas que permitan enriquecer y contextualizar la evaluación.

Su aporte permitirá fortalecer la propuesta y asegurar su validez en términos académicos y pedagógicos.

Agradecemos de antemano su tiempo y disposición en este proceso.

Criterio	Descripción	1 Muy bajo	2 Bajo	3 Aceptable	4 Alto	5 Muy alto	Observaciones cualitativas
Pertinencia	El contenido de la propuesta responde a las necesidades detectadas en el diagnóstico y al contexto de los estudiantes.					X	La propuesta responde a un problema real del aprendizaje de fracciones y se ajusta al contexto de la educación básica colombiana.

Criterio	Descripción	1 Muy bajo	2 Bajo	3 Aceptable	4 Alto	5 Muy alto	Observaciones cualitativas
Coherencia	Existe correspondencia entre los objetivos, actividades, competencias e indicadores planteados.					X	Hay una alineación clara entre diagnóstico, objetivos y actividades; los indicadores son medibles y pertinentes.
Aplicabilidad	La propuesta es viable de implementar en el aula con los recursos disponibles y en el tiempo asignado.				X		La propuesta es viable, aunque requiere prever disponibilidad de material concreto en instituciones con recursos limitados.
Innovación	El diseño presenta elementos novedosos en comparación con enfoques tradicionales de enseñanza.					X	El uso de recursos digitales como GeoGebra y materiales manipulativos les da un carácter innovador frente a prácticas tradicionales.
Factibilidad	La propuesta puede ser replicada en otros contextos educativos con condiciones similares.				X		Es replicable en instituciones públicas; se sugiere acompañar con formación docente para fortalecer su sostenibilidad.

Puntaje total: 23/25

Comentario global: La propuesta constituye un aporte pedagógico relevante y replicable, con potencial para institucionalizarse como estrategia de enseñanza innovadora de las fracciones en la educación básica.

Evaluador: Julio Alexander Argoti Álvarez



Rúbrica para evaluar la propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería
Didáctica para la enseñanza de las fracciones

Estimado(a) evaluador(a):

El presente instrumento tiene como finalidad validar la propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las fracciones en estudiantes de cuarto grado de primaria. Su valoración es fundamental para garantizar la pertinencia, coherencia, aplicabilidad, innovación y factibilidad de la propuesta en contextos educativos reales.

La rúbrica está organizada en cinco criterios. Cada uno debe calificarse en una escala de 1 (muy bajo) a 5 (muy alto), según el nivel de cumplimiento observado. Adicionalmente, se solicita consignar observaciones cualitativas que permitan enriquecer y contextualizar la evaluación.

Su aporte permitirá fortalecer la propuesta y asegurar su validez en términos académicos y pedagógicos.

Agradecemos de antemano su tiempo y disposición en este proceso.

Criterio	Descripción	1 Muy bajo	2 Bajo	3 Aceptable	4 Alto	5 Muy alto	Observaciones cualitativas
Pertinencia	El contenido de la propuesta responde a las necesidades detectadas en el diagnóstico y al contexto de los estudiantes.					X	Atiende las dificultades matemáticas en primaria y es pertinente para contextos rurales y multiculturales como los de Supía.
Coherencia	Existe correspondencia entre los objetivos, actividades, competencias e indicadores planteados.				X		Hay coherencia entre objetivos y actividades, aunque sería recomendable afinar algunos indicadores para vincular mejor el contexto indígena y rural.
Aplicabilidad	La propuesta es viable de implementar en el aula con los recursos disponibles y en el tiempo asignado.					X	Puede aplicarse directamente en instituciones oficiales, con adaptaciones para estudiantes con necesidades educativas diversas.
Innovación	El diseño presenta elementos novedosos en comparación con enfoques tradicionales de enseñanza.				X		Introduce recursos variados, aunque convendría fortalecer ejemplos culturalmente situados.
Factibilidad	La propuesta puede ser replicada en otros contextos educativos con condiciones similares.					X	Es factible y transferible, con bajo costo y fácil implementación; se ajusta al enfoque de programas nacionales como el PTA.

Puntaje total: 23/25

Comentario global: La propuesta es altamente pertinente y aplicable, con un enfoque innovador que contribuye a superar las limitaciones de la enseñanza tradicional. Su éxito depende de acompañamiento docente sostenido para garantizar su impacto.

Evaluador: Omaira Giraldo Guerrero



**Rúbrica para evaluar la propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería
Didáctica para la enseñanza de las fracciones**

Estimado(a) evaluador(a):

El presente instrumento tiene como finalidad validar la propuesta didáctica fundamentada en la Ingeniería Didáctica para la enseñanza de las fracciones en estudiantes de cuarto grado de primaria. Su valoración es fundamental para garantizar la pertinencia, coherencia, aplicabilidad, innovación y factibilidad de la propuesta en contextos educativos reales.

La rúbrica está organizada en cinco criterios. Cada uno debe calificarse en una escala de 1 (muy bajo) a 5 (muy alto), según el nivel de cumplimiento observado. Adicionalmente, se solicita consignar observaciones cualitativas que permitan enriquecer y contextualizar la evaluación.

Su aporte permitirá fortalecer la propuesta y asegurar su validez en términos académicos y pedagógicos.

Agradecemos de antemano su tiempo y disposición en este proceso.

Criterio	Descripción	1 Muy bajo	2 Bajo	3 Aceptable	4 Alto	5 Muy alto	Observaciones cualitativas
Pertinencia	El contenido de la propuesta responde a las necesidades detectadas en el diagnóstico y al					X	Se evidencia que la propuesta aborda dificultades críticas diagnosticadas en el aprendizaje de fracciones,

Criterio	Descripción	1 Muy bajo	2 Bajo	3 Aceptable	4 Alto	5 Muy alto	Observaciones cualitativas
	contexto de los estudiantes.						ajustada a la realidad educativa de Supía.
Coherencia	Existe correspondencia entre los objetivos, actividades, competencias e indicadores planteados.				X		Hay una coherencia global; sin embargo, sería valioso mejorar la redacción de algunos objetivos específicos para facilitar la evaluación directa de los logros alcanzados.
Aplicabilidad	La propuesta es viable de implementar en el aula con los recursos disponibles y en el tiempo asignado.					X	El uso de materiales concretos y la guía impresa fortalecen la aplicabilidad en el aula, favoreciendo aprendizajes significativos.
Innovación	El diseño presenta elementos novedosos en comparación con enfoques tradicionales de enseñanza.				X		La articulación de la Ingeniería Didáctica con actividades contextualizadas ofrece un componente innovador para el aprendizaje de las fracciones.
Factibilidad	La propuesta puede ser replicada en otros contextos educativos con condiciones similares.					X	Se observa alta factibilidad de implementación en instituciones con contextos similares, lo que le otorga valor de transferibilidad a nivel regional.

Puntaje total: 23/25

Comentario global: La propuesta se distingue por su pertinencia, coherencia y factibilidad, aportando un modelo innovador y transferible que contribuye a mejorar la enseñanza de las fracciones y fortalecer la formación docente en matemáticas.

Evaluador: Martha Janeth Mondragón Valencia

Anexo 6. Hojas de vida de los evaluadores

En este instrumento se aprecian las hojas de vida de los expertos evaluadores de cada uno de los instrumentos empelados en esta propuesta investigativa

Hoja de vida experto # 1.

Nombre del experto: Julio Alexander Argoti Álvarez Correo electrónico: Alexander.argoti@gmail.com Teléfono celular: 3208878535 ORCID: https://orcid.org/0009-0001-5597-4334
Formación académica: Pregrado: Matemático. Pregrado: Ingeniero de sistemas Pregrado: Ingeniero ambiental Magister: Ingeniería ambiental Magister: Métodos numéricos Doctor: Ciencias de la educación
Experiencia docente y profesional: 25 años de experiencia laboral como docente universitario en las áreas de matemáticas e ingeniería en la Universidad Uniminuto y de Antioquia. 10 años de docente en el sector público en la Secretaría de Educación de Caldas. Docente Tutor del Programas Todos a Aprender (PTA)
Experiencia en investigación: Investigador Junior de Colciencias en las líneas de modelación y simulación matemática para el cambio climático
Producción científica: Artículo: El pensamiento computacional, como soporte del pensamiento matemático, en la Institución Educativa Santo Domingo Savio de Chinchiná (Caldas– Colombia). https://revistas.utp.edu.co/index.php/miradas/article/view/25518

Hoja de vida experto # 2.**Datos personales:**

Nombre: Omaira Giraldo Guerrero

Correo electrónico: giraldo_omaira@yahoo.com.ar

Teléfono celular: 3113416777

Dirección: carrera 10 N° 29 - 15 Supía, Caldas

N° Celular: 3113416777

Formación académica:

Pregrado: Licenciatura en Educación Física – Universidad de Caldas, Colombia. 1999.

Posgrado: Maestría en Educación y Desarrollo Humano – Universidad de Manizales, Colombia. 2007.

Posgrado: Doctorado en Ciencias de la Educación – Universidad de Cuauhtémoc, México. 2021.

Experiencia docente:

Desempeño como Docente Tutora en el área de matemáticas desde 2013, contribuyendo al desarrollo académico en el marco del Programa Todos a Aprender y el PTAFI 3.0.

Implementando estrategias pedagógicas para el fortalecimiento del aprendizaje matemático en diversas instituciones educativas, incluyendo:

I.E. Gómez Fernández - en Anserma.

Colaboración en la promoción de la educación matemática en contextos multiculturales, trabajando en los resguardos indígenas:

I.E. Sipirra, I.E. San Jerónimo e I.E. Riosucio en el Municipio de Riosucio.

Aporte significativo en la mejora de la calidad educativa en matemáticas en la I.E. Supía y la I.E. Francisco José de Caldas, en el Municipio de Supía.

Experiencia previa como docente de aula en matemáticas por 13 años en la I.E. Francisco José de Caldas.

Coordinación del programa "Bachillerato focalizado con énfasis en formación laboral", dirigido a jóvenes y adultos en la I.E. Francisco José de Caldas de Supía. Implementando estrategias pedagógicas adaptadas a la educación de adultos, facilitando el aprendizaje y la titulación de bachiller en jornadas de fin de semana.

Gestión y supervisión de actividades académicas y administrativas para garantizar la calidad y eficiencia del servicio educativo ofrecido, mediante el desarrollo de planes de estudio con enfoque en la formación laboral, preparando a los estudiantes para el mercado de trabajo.

Hoja de vida experto # 3

Nombre del experto: Martha Janeth Mondragón Valencia Correo electrónico: mondrita78@hotmail.com Teléfono celular: 3137912275 ORCID:
Formación académica: Pregrado: Licenciada en Educación con Especialidad en Matemáticas por la Universidad Católica de Manizales Otros estudios: Taller de redacción de textos académicos (Universidad de Caldas, 2018) Escuela TIC para docentes innovadores (Universidad de los Andes, 2017). • Diplomado en Fundamentos Programa Todos a Aprender 2015 (Universidad de los Andes, 2015). • Diplomado en Formación a Directivos Docentes (Universidad de la Salle, 2013). • Diplomado en el manejo de las TIC (Computadores para Educar, 2012). • Capacitación en manejo de la Metodología Escuela Nueva (COMITÉ DE CAFETEROS, 2011). • Diplomados en estrategias Didácticas de pedagogía conceptual para la enseñanza de competencias relacionadas con matemáticas y el desarrollo de competencias lectoras e intelectuales (Fundación Internacional de Pedagogía Conceptual Alberto Merani y A.P.E. Asesores de Proyectos Educativos, 2007 y 2005 respectivamente). • Diplomados en Pedagogía y Didáctica de la Ética y los Valores, y Desarrollo Humano (Pontificia Universidad Javeriana, 2001). Posgrado: Especialista en Gestión de Proyectos por el SENA Magister: Magister en Educación por la Universidad Católica de Manizales Doctor: Doctorado: Doctora en Educación por la Universidad Católica de Manizales.
Experiencia docente y profesional: • Rectora en la Secretaría de Educación del Departamento de Caldas (diciembre 26 de 2023 - empleo actual). • Tutora del Programa Para la Transformación de la Calidad Educativa Todos a Aprender (PTA) en la Secretaría de Educación del Departamento de Caldas (abril 26 de 2013 - diciembre 25 de 2023). • Docente de Matemáticas en la Institución Educativa Eduardo Gómez Arrubla (julio 18 de 2005 - diciembre 25 de 2023). • Par Evaluador en CORPOEDUCACIÓN para la Evaluación de Carácter Diagnóstico Formativa –ECDF (julio 20 de 2019 - agosto 15 de 2019). • Tutora del Diplomado Escuela De Vida para rectores de Instituciones Educativas oficiales en la Universidad de Manizales (2015). • Docente de los módulos "Desarrollo del pensamiento lógico matemático en el niño" y "Fundamentos matemáticos" en Uniminuto Corporación Universitaria Minuto de Dios. CERES (agosto de 2011 - marzo de 2013). • Integrante del equipo de validación de Guías de Interaprendizaje Escuela Nueva (áreas de Matemáticas grados Sexto, Séptimo, Octavo y Guías de Convivencia Ciudadana) en el Comité Departamental de Cafeteros (agosto de 2013 - junio de 2014). • Docente del módulo Matemática Financiera en la Universidad de Caldas (marzo de 2012 - julio de 2012).

• Multiplicadora en Manejo de la metodología Escuela Nueva Postprimaria Nombre del experto: Martha Janeth Mondragón Valencia
 Correo electrónico: mondrira78@hotmail.com
 Teléfono celular: 3137912275
 ORCID:
 Formación académica:
 Pregrado: Licenciada en Educación con Especialidad en Matemáticas por la Universidad Católica de Manizales
 Otros estudios: Taller de redacción de textos académicos (Universidad de Caldas, 2018)
 Escuela TIC para docentes innovadores (Universidad de los Andes, 2017).
 • Diplomado en Fundamentos Programa Todos a Aprender 2015 (Universidad de los Andes, 2015).
 • Diplomado en Formación a Directivos Docentes (Universidad de la Salle, 2013).
 • Diplomado en el manejo de las TIC (Computadores para Educar, 2012).
 • Capacitación en manejo de la Metodología Escuela Nueva (COMITÉ DE CAFETEROS, 2011).
 • Diplomados en estrategias Didácticas de pedagogía conceptual para la enseñanza de competencias relacionadas con matemáticas y el desarrollo de competencias lectoras e intelectuales (Fundación Internacional de Pedagogía Conceptual Alberto Merani y A.P.E. Asesores de Proyectos Educativos, 2007 y 2005 respectivamente).
 • Diplomados en Pedagogía y Didáctica de la Ética y los Valores, y Desarrollo Humano (Pontificia Universidad Javeriana, 2001).
 Posgrado: Especialista en Gestión de Proyectos por el SENA
 Magister: Magister en Educación por la Universidad Católica de Manizales
 Doctor: Doctorado: Doctora en Educación por la Universidad Católica de Manizales.
 Experiencia docente y profesional:
 • Rectora en la Secretaría de Educación del Departamento de Caldas (diciembre 26 de 2023 - empleo actual).
 • Tutora del Programa Para la Transformación de la Calidad Educativa Todos a Aprender (PTA) en la Secretaría de Educación del Departamento de Caldas (abril 26 de 2013 - diciembre 25 de 2023).
 • Docente de Matemáticas en la Institución Educativa Eduardo Gómez Arrubla (julio 18 de 2005 - diciembre 25 de 2023).
 • Par Evaluador en CORPOEDUCACIÓN para la Evaluación de Carácter Diagnóstico Formativa –ECDF (julio 20 de 2019 - agosto 15 de 2019).
 • Tutora del Diplomado Escuela De Vida para rectores de Instituciones Educativas oficiales en la Universidad de Manizales (2015).
 • Docente de los módulos "Desarrollo del pensamiento lógico matemático en el niño" y "Fundamentos matemáticos" en Uniminuto Corporación Universitaria Minuto de Dios. CERES (agosto de 2011 - marzo de 2013).
 • Integrante del equipo de validación de Guías de Interaprendizaje Escuela Nueva (áreas de Matemáticas grados Sexto, Séptimo, Octavo y Guías de Convivencia Ciudadana) en el Comité Departamental de Cafeteros (agosto de 2013 - junio de 2014).
 • Docente del módulo Matemática Financiera en la Universidad de Caldas (marzo de 2012 - julio de 2012).
 • Multiplicadora en Manejo de la metodología Escuela Nueva Postprimaria en el Comité Departamental de Cafeteros (junio 18 de 2007 - junio 22 de 2007).

- Directivo docente (Coordinadora) en la I. E. Escuela Normal Superior de Sagrado Corazón (julio 13 de 2006 - noviembre de 2006).
- Docente de Primaria Escuela Unitaria en la Institución Educativa Politécnico Naranjal (junio 03 de 2004 - julio 17 de 2005).
- Docente de Matemáticas en el Colegio Oficial Mixto Llanadas (marzo 02 de 2004 - mayo 06 de 2004).
- Docente de Álgebra y Matemáticas Financiera en la Institución Educativa Santo Domingo Savio (mayo 29 de 2002 - mayo 07 de 2004; marzo 01 de 2004 - junio 02 de 2004).
- Docente de Primaria en la I. E. San Francisco de Paula, sede María Inmaculada (marzo 12 de 2002 - mayo 28 de 2002).
- Docente de Primaria en la I. E. Bartolomé Mitre, sede Juan José Rondón (julio 16 de 1996 - julio 15 de 2000).
- Coordinadora Parroquial de Catequistas en la Parroquia Las Mercedes (enero de 1995 - diciembre de 1996).

Experiencia en investigación:

"Conocimiento didáctico del contenido en Matemáticas. Estudio de caso con profesores de Básica Primaria". Aunque no es una publicación o un proyecto de investigación formalmente listado, esta propuesta es parte de su trabajo académico de investigación para obtener el grado de Doctora.

Producción científica:

Artículo:

aria en el Comité Departamental de Cafeteros (junio 18 de 2007 - junio 22 de 2007).

- Directivo docente (Coordinadora) en la I. E. Escuela Normal Superior de Sagrado Corazón (julio 13 de 2006 - noviembre de 2006).
- Docente de Primaria Escuela Unitaria en la Institución Educativa Politécnico Naranjal (junio 03 de 2004 - julio 17 de 2005).
- Docente de Matemáticas en el Colegio Oficial Mixto Llanadas (marzo 02 de 2004 - mayo 06 de 2004).
- Docente de Álgebra y Matemáticas Financiera en la Institución Educativa Santo Domingo Savio (mayo 29 de 2002 - mayo 07 de 2004; marzo 01 de 2004 - junio 02 de 2004).
- Docente de Primaria en la I. E. San Francisco de Paula, sede María Inmaculada (marzo 12 de 2002 - mayo 28 de 2002).
- Docente de Primaria en la I. E. Bartolomé Mitre, sede Juan José Rondón (julio 16 de 1996 - julio 15 de 2000).
- Coordinadora Parroquial de Catequistas en la Parroquia Las Mercedes (enero de 1995 - diciembre de 1996).

Experiencia en investigación:

"Conocimiento didáctico del contenido en Matemáticas. Estudio de caso con profesores de Básica Primaria". Aunque no es una publicación o un proyecto de investigación formalmente listado, esta propuesta es parte de su trabajo académico de investigación para obtener el grado de Doctora.

Anexo 7. Recursos digitales complementarios

Con el fin de ampliar los productos derivados de la presente investigación y potenciar su impacto pedagógico, se presentan a continuación recursos digitales abiertos que pueden complementar la guía didáctica, apoyar la labor docente y fortalecer el aprendizaje autónomo de los estudiantes.

1. Simuladores y aplicaciones interactivas

- **GeoGebra Classroom** – Plataforma gratuita con actividades interactivas y construcción de fracciones y representaciones gráficas.

<https://www.geogebra.org/m/sqe8f2xw?utm>

- **PhET Interactive Simulations – Matemáticas** – Simulaciones dinámicas de fracciones, proporciones y porcentajes.

<https://phet.colorado.edu/es/simulations/fraction-matcher>

2. Plataformas de aprendizaje en línea

- **Khan Academy – Fracciones** – Cursos estructurados con videos, ejercicios y retroalimentación inmediata.

<https://es.khanacademy.org/math/arithmetic/fraction-arithmetic>

- **Mundo Primaria – Recursos de matemáticas** – Juegos interactivos diseñados para la enseñanza básica.

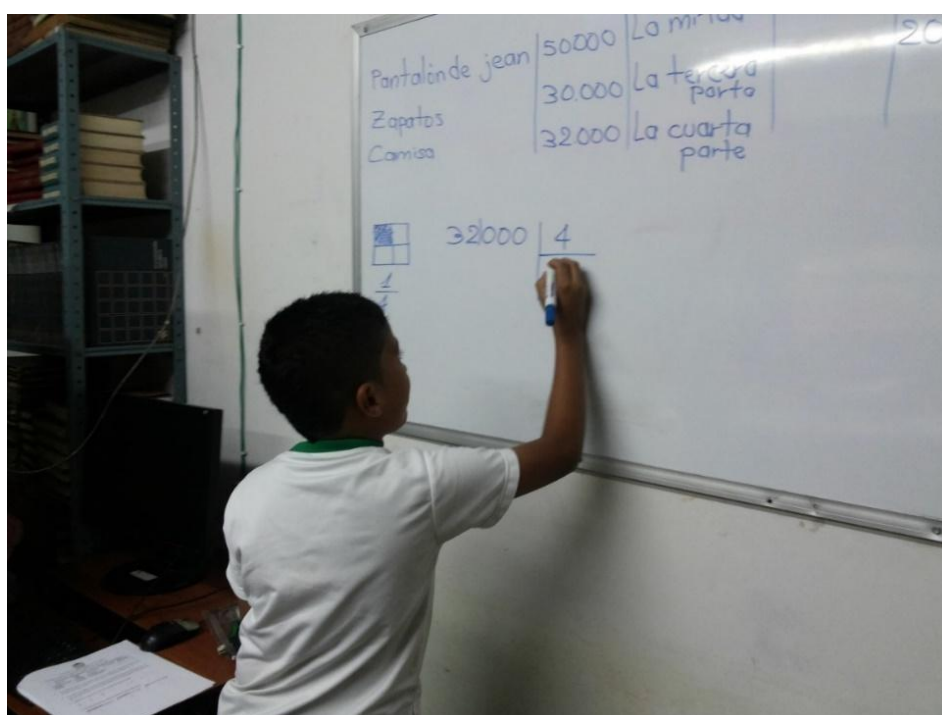
<https://www.mundoprimary.com/juegos-educativos/juegos-matematicas>

3. Videos y material audiovisual

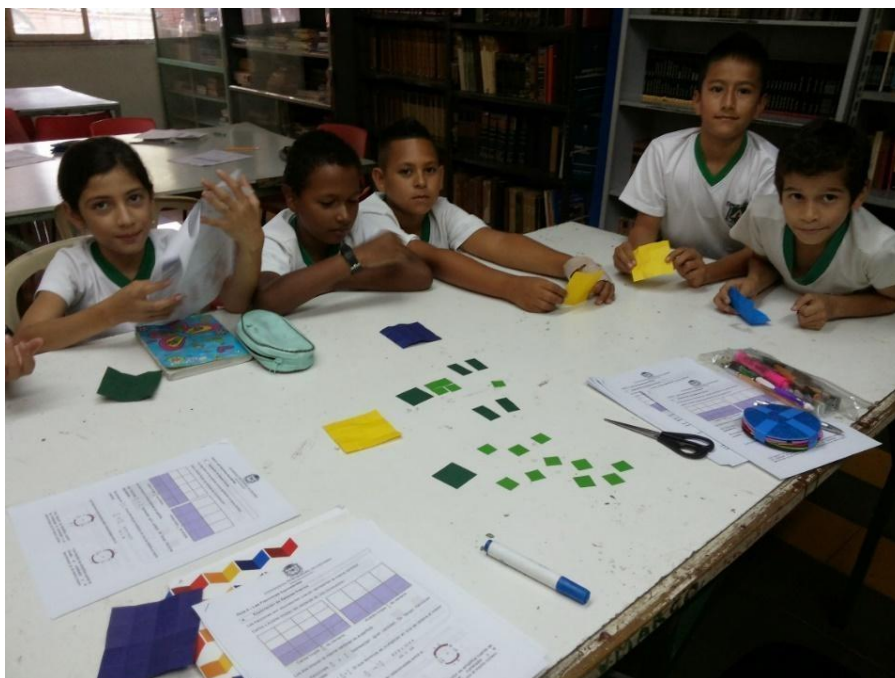
YouTube – Videos explicativos sobre fracciones

<https://www.youtube.com/@Matemovil>

Anexo 8. Registros fotográficos del trabajo con los estudiantes.







Anexo 9. Evidencia del trabajo de tratamiento de datos con SPSS

*FreidelUltimo.sav [ConjuntoDatos1] - IBM SPSS Statistics Editor de datos

Archivo Editar Ver Datos Transformar Analizar Gráficos Utilidades Ampliaciones Ventana Ayuda

	Nombre	Tipo	Anchura	Decimales	Etiqueta	Valores	Perdidos	Columnas	Alineación	Medida	Rol
1	Estudiante	Númérico	3	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Escala	Entrada
2	P1	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Nominal	Entrada
3	P8	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Nominal	Entrada
4	P9	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Nominal	Entrada
5	P10	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Nominal	Entrada
6	RC_1	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Escala	Entrada
7	P2	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Nominal	Entrada
8	P12	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Nominal	Entrada
9	P13	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Nominal	Entrada
10	RC_2	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Escala	Entrada
11	P3	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Nominal	Entrada
12	P4	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Nominal	Entrada
13	P5	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Nominal	Entrada
14	P6	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Nominal	Entrada
15	P7	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Nominal	Entrada
16	P20	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Nominal	Entrada
17	RC_3	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Escala	Entrada
18	P11	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Nominal	Entrada
19	P18	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Nominal	Entrada
20	P19	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Nominal	Entrada
21	RC_4	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Escala	Entrada
22	P14	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Nominal	Entrada
23	P15	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Nominal	Entrada
24	RC_5	Númérico	1	0		Ninguno	Ninguno	8	Derecha	Escala	Entrada

Vista de datos Vista de variables

```
*Generalized Linear Mixed Models.
GENLINMIXED
  /DATA_STRUCTURE SUBJECTS=Grupo*Problema
  /FIELD TARGET=RC_1 TRIALS=NONE OFFSET=NONE
  /TARGET_OPTIONS DISTRIBUTION=NORMAL LINK=IDENTITY
  /FIXED EFFECTS=Metodo USE_INTERCEPT=TRUE
  /RANDOM USE_INTERCEPT=TRUE SUBJECTS=Grupo COVARIANCE_TYPE=VARIANCE_COMPONENTS SOLUTI
ON=FALSE
  /BUILD_OPTIONS TARGET_CATEGORICAL_ORDER=ASCENDING INPUTS_CATEGORICAL_ORDER=ASCENDING MAX_I
TERATIONS=100 CONFIDENCE_LEVEL=95 DF_METHOD=RESIDUAL COVB=MODEL PCOMMERGE=0.000001 (ABS
OLUTE) SCORING=0 SINGULAR=0.000000000001
  /EMMEANS_OPTIONS SCALE=ORIGINAL PADJUST=LSD.
```

Modelos lineales mixtos generalizados

Advertencias

glmm: La matriz Hessiana final no es definida positiva aunque se han cumplido todos los criterios de convergencia. El procedimiento continúa a pesar de este aviso. Los resultados subsiguientes producidos se basan en la última iteración. La validez del ajuste de modelo es incierta.

Resumen de procesamiento de casos

	N	Porcentaje
Incluido	298	100.0 %
Excluido	0	0.0 %
Total	298	100.0 %

Resumen del modelo

Objetivo	RC_1
Distribución de probabilidad	Normal
Función de enlace	Identidad
Criterio de información	
Akaike Corregida	795,979
Bayesiana	1055,131

Los criterios de información se basan en Log-verosimilitud -2 (1043,750) y se utilizan para comparar modelos. Los modelos con valores de criterio de información menores se ajustan mejor.

Estructura de datos^{a,b}

	Sujetos	Objetivo
	Grupo	RC_1
Datos del primer sujeto	GC	1
	GC	2
	GC	1
	GC	2
	GC	1
	GC	1
	GC	0
	GC	0
	GC	0
	GC	1
Número total de niveles:		4

Sólo se visualizan los primeros 10 registros.

a. Objetivo: RC_1

b. Objetivo: RC_1

Se han especificado uno o más sujetos pero no se utilizan en el análisis.